Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Wintersemester 2024/25

Linear Algebra I
Übungsblatt 2
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

Sei $M = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_n \end{array}\right)$ die Koeffizientenmatrix von $\underline{L}$, die in Normalform gebracht worden ist. Für jedes $i \leqslant n$ gibt es drei Möglichkeiten: entweder die i^{te} Spalte enthält keinen Pivot-Eintrag; dann lässt sich jede reelle Zahl c_i zu einer Lösung ergänzen; oder die i^{te} Spalte enthält einen Pivot-Eintrag $a_{j,i}$. In diesem Fall ist die j^{te} Gleichung genau wie folgt:

$$x_i + a_{j,i+1}x_{i+1} + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j.$$

Wenn für alle $k > i$ alle $a_{j,k} = 0$ sind, dann gilt $x_i = b_j$, und genau eine reelle Zahl lässt sich zu einer Lösung ergänzen; nämlich $c_i = b_j$.

Wenn für mindenstens ein $k > i$ ein Koeffizient $a_{j,k} \neq 0$ ist, dann lässt sich jede reelle Zahl c_i zu einer Lösung ergänzen: Sei $c_i \in \mathbb{R}$ und sei $a_{j,k} \neq 0$. Dann enthält die k^{te} Spalte keinen Pivot-Eintrag, und wir können $x_k = \frac{b_j - c_i}{a_{j,k}}$ wählen. Für alle anderen $k' > i$ mit $a_{j,k'} \neq 0$ enthält auch die k'^{te} Spalte keinen Pivot-Eintrag, d. h. wir können $x_{j,k'} = 0$ wählen. Dann gilt

$$x_i + 0 + \cdots + 0 + a_{j,k}\frac{b_j - c_i}{a_{j,k}} + 0 + \cdots + 0 = b_j$$

und das impliziert $x_i = c_i$. Das heißt, jede reelle Zahl c_i lässt sich zu einer Lösung ergänzen.

Aufgabe 2.

a) Ja: wenn A wahr ist, sind beide Aussagen wahr; wenn A falsch ist und sowohl B als auch C wahr sind, sind beide Aussagen wahr; und in allen anderen Fällen sind beide Ausagen falsch.

b) Ja: “$A \Rightarrow B$” ist falsch gdw. A wahr ist und B falsch ist; “$\neg A \vee B$” falsch ist gdw. $\neg A$ und B beide falsch sind, das heißt, A wahr ist und B falsch ist.

c) Nein: wenn A wahr, B falsch und C beliebig sind, sind “$(A \Rightarrow B) \Rightarrow C$” wahr und “$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)$” falsch.

d) Nein: wenn A und B beide wahr sind, sind “$A \Rightarrow B$” wahr und “$\neg(B \Rightarrow A)$” falsch.

e) Ja: aus (b) folgt, dass “$A \Rightarrow B$” und “$\neg A \vee B$” äquivalent sind, und auch dass “$(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$” und “$\neg\neg B \vee \neg A$” äquivalent sind, und weil $\neg\neg B$ und B äquivalent sind, folgt die Antwort.

f) Ja: wenn B falsch ist, sind beide Aussagen falsch; wenn B wahr ist und A falsch ist, sind beide Aussagen wahr; und wenn beide A und B wahr sind, sind beide Aussagen falsch.

Aufgabe 3.

a) i) Es existiert (mindestens) eine natürliche Zahl, die Alina sehr mag.
   ii) Für jeder natürliche Zahl x gibt es (mindestens) eine reelle Zahl y, die Alina nicht genauso mag wie x.
   iii) Es existiert (mindestens) eine reelle Zahl y, die Alina nicht genauso mag wie jede naturale Zahlen.
   iv) Entweder Alina mag alle natural Zahlen gar nicht, oder Alina mag alle natural Zahlen ein bisschen.
   v) Alina mag jede natürliche Zahlen entweder ein bisschen oder gar nicht.

b) Wenn Alina alle Zahlen gar nicht mag, außer 0, die sie sehr mag, und 1, die sie ein bisschen mag; dann ist (ii) wahr und (iii) falsch.

c) Wenn Alina gerade natürliche Zahlen ein bisschen mag und underade natürliche Zahlen gar nicht mag, dann ist (v) wahr aber (iv) falsch.

d) (i) ist genau $\neg$(v) – und (v) ist genau $\neg$(i).

e) Es existiert eine natürliche Zahl die Alina genauso mag wie alle reelle Zahlen.