Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Wintersemester 2024/25

Linear Algebra I
Übungsblatt 3
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie die gleiche Elemente enthalten. Wir zeigen als erstes, dass $A \times (B \cup C)$ eine Teilmenge von $(A \times B) \cup (A \times C)$ ist, und dann die Umkehrung.

Sei $x \in A \times (B \cup C)$. Per Definition lässt sich x als (a, y) schreiben, mit $a \in A$ und $y \in (B \cup C)$. Weil $y \in (B \cup C)$ ist, ist entweder $y \in B$ oder $y \in C$; wenn $y \in B$, dann $x \in A \times B$, und wenn $y \in C$, dann $x \in A \times C$; das heißt, $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$.

Sei jetzt $x \in (A \times B)$. Per Definition lässt sich x als (a, b) schreiben, mit $a \in A$ und $b \in B$. Dann ist auch $b \in (B \cup C)$, und damit $x \in A \times (B \cup C)$; das heißt, $A \times B \subseteq A \times (B \cup C)$. Analog erhalten wir $A \times C \subseteq A \times (B \cup C)$, und beide Ergebnisse zusammen implizieren, dass $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$ ist.

b) Seien A und B endlich, dann ist auch $(A \cap B)$ endlich. $A \cap B$ lässt sich als $A \cap B = \{x_1, \cdots, x_n\}$ schreiben, mit $n = \#(A \cap B)$.

Wir schreiben auch $A \setminus (A \cap B) = \{a_1, \cdots, a_m\}$ und $B \setminus (A \cap B) = \{b_1, \cdots, b_k\}$ für $m, k \in \mathbb{N}^2$. Dann gilt $A \cup B = \{a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_k, x_1, \cdots, x_n\}$ und:

$$\#A = m + n$$
$$\#B = k + n$$
$$\#(A \cap B) = n$$
$$\#(A \cup B) = m + n + k$$

und natürlich gilt $m + n + k = m + n + k + n - n$.

Aufgabe 2.

a) Wahr: wenn beide $A \subseteq M$ und $B \subseteq M$ gelten, gilt auch $A \cup B \subseteq M$.

b) Falsch: für eine beliebige Menge M ist immer $\emptyset$ in $\mathcal{P}(M)$ enthalten, aber für beliebige Mengen A und B gilt $\emptyset \notin (\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B))$.

c) Wahr: für eine beliebige Menge M ist immer $\emptyset \subseteq M$, d.h. $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$, d.h. $\{\emptyset\} \subseteq \mathcal{P}(M)$, d.h. $\{\emptyset\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$, d.h. $\{\{\emptyset\}\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(M)))$.

d) Falsch: die Mengen $\{\{1, 2, 3\}\}$ und $\{\{2, 3, 1\}\}$ sind gleich, dann gilt $\{\{1, 2, 3\}\} \cup \{\{2, 3, 1\}\} = \{\{1, 2, 3\}\}$, und diese Menge enthält nur einen Element.

Aufgabe 3.

a) $g \in \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$.

b) $g^{-1}(0)$ ist eine Menge (genauer: eine Teilmenge von $\mathbb{N}$).

c) $f(\mathrm{id}_{\mathbb{N}}) = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{N} \mid \mathrm{id}_{\mathbb{N}}(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{N} \mid x = 0\} = \{0\}$.

d) $f(g) = g^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{N} \mid g(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 = 0\} = \emptyset$.

e) Ja, z.B. $g_1 \colon n \mapsto 1$ und $g_2 \colon n \mapsto 2$.

f) Damit $f(g) = \mathbb{N}$ gilt, muss $g^{-1}(0)$ gleich $\mathbb{N}$ sein, das heißt, g muss alle $n \in \mathbb{N}$ auf 0 schicken.

g) Nein: sei $M \subseteq \mathbb{N}$. Die Abbildung g_M, die definiert ist durch $g_M(x) = 0$ wenn $x \in M$ und $g_M(x) = 1$ wenn $x \notin M$ erfült $f(g_M) = M$.

Aufgabe 4.

a) $(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \notin \mathbb{Z}$. Das bedeutet, dass der Wertebereich von f_1 nicht $\mathbb{Z}$ sein kann.

b) f_2 ist eine korrekte Abbildung, die injektiv aber nicht surjektiv ist.

c) f_3 ist eine korrekte Abbildung, die surjektiv aber nicht injektiv ist.

d) f_4 ist keine Abbildung; für $x = -1$ gibt es keine $y \in \mathbb{R}$ sodass $(-1, y)$ im Graph ist – und für $x = 1$ gibt es zwei verschiedene y.

e) f_5 ist eine korrekte Abbildung, die nicht injektiv oder surjektiv ist.