Prof. Immanuel Halupczok HHU Düsseldorf
Dr. Blaise Boissonneau Wintersemester 2024/25

Linear Algebra I
Übungsblatt 4
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Sei $a \in M$. Wir müssen zeigen, dass genau eine Äquivalenzklasse $b/{\sim} \in M/{\sim}$ existiert mit $a \in b/{\sim}$.

Per Definition gilt $a \in b/{\sim}$ gdw. $a \sim b$ gilt. Weil $\sim$ reflexiv ist, gilt $a \sim a$; d.h., $a \in a/{\sim}$. Es bleibt zu zeigen, dass keine weitere Äquivalenzklasse $b/{\sim}$ existiert mit $a \in b/{\sim}$. Anders ausgedrückt: Wir nehmen $a \in b/{\sim}$ an und wollen zeigen, dass $a/{\sim} = b/{\sim}$ ist.

Sei $c \in a/{\sim}$, dann gilt $c \sim a$. Weil $a \sim b$ gilt, und weil $\sim$ transitiv ist, gilt auch $c \sim b$, d.h., $c \in b/{\sim}$.

Sie nun $c \in b/{\sim}$, dann gilt $c \sim b$. Weil $a \sim b$ gilt, und weil $\sim$ symmetrisch ist, gilt auch $b \sim a$. Dann gilt auch per Transitivität $c \sim a$, d.h., $c \in a/{\sim}$.

Aufgabe 2.

a) Sei $x \in \operatorname{im}(g \circ f)$. Per Definition lässt sich x als $(g \circ f)(y)$ schreiben, mit $y \in A$. Dann ist $f(y) \in \operatorname{im} f$ und $x = g(f(y)) \in g(\operatorname{im} f)$.

   Sei $x \in g(\operatorname{im}(f))$. Per Definition lässt sich x als $g(y)$ schreiben, mit $y \in \operatorname{im} f$. Per Definition lässt sich y als $f(z)$ schreiben, mit $z \in A$. Dann ist $x = g(y) = g(f(z)) = g \circ f(z)$ und $x \in \operatorname{im}(g \circ f)$.

b) Seien $x_1, x_2 \in A$ mit $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. Weil g injektiv ist, gilt $f(x_1) = f(x_2)$. Weil f injektiv ist, gilt $x_1 = x_2$, d.h., $g \circ f$ ist injektiv.

Aufgabe 3.

a) Die Relation ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv: $1 \sim 2$ und $2 \sim 3$, aber $1 \not\sim 3$.

b) Die Relation ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch: $0 \sim 1$ aber $1 \not\sim 0$.

c) Die Relation ist eine Äquivalenzrelation. Es gilt $(a, b) \sim (a-b, 0)$ für alle $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$, und für alle $a, a' \in \mathbb{Q}^2$ gilt $(a, 0)/{\sim} = (a', 0)/{\sim}$ gdw. $a = a'$. D.h., jede Äquivalenzklasse enthält genau einen Paar der Form $(a, 0)$, und:

$$M/{\sim} = \{\{(a, b) \in \mathbb{Q}^2 \mid a - b = c\} \mid c \in \mathbb{Q}\}.$$

Aufgabe 4.

a) Angenommen, dass $E \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ "neutral" ist, d.h., es gilt $E \cap X = X$ für alle $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Insbesondere gilt $E \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$. Dann muss $E = \mathbb{N}$ sein. Wir nehmen $E = \mathbb{N}$, dann ist es klar, dass E neutral ist; d.h. , $E \cap X = X \cap E = X$ für jede $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

   Auch haben wir dass $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ für alle Menge A, B, C, insbesondere für $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

b) Sei $A = \emptyset$. Dann gilt $A \cap X = \emptyset \neq E$ für jede $X \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$; das heißt, A besitzt kein Inverses.

Aufgabe 5.
Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, dann gilt $(a \circ b) \circ c = (a \circ b) + c - 2 = (a + b - 2) + c - 2 = a + b + c - 4$ und $a \circ (b \circ c) = a + (b \circ c) - 2 = a + (b + c - 2) - 2 = a + b + c - 4$. Das heißt, "$\circ$" ist assoziativ.

Sei $a \in \mathbb{R}$, dann gilt $a \circ 2 = a + 2 - 2 = a$ und $2 \circ a = 2 + a - 2 = a$. Das heißt, "2" ist ein neutrales Element für "$\circ$".

Sei $a \in \mathbb{R}$, dann gilt $a \circ (4 - a) = a + 4 - a - 2 = 2$ und $(4 - a) \circ a = 4 - a + a - 2 = 2$. Das heißt, $4 - a$ ist das Inverse von a für "$\circ$".

Aufgabe 6. Seien $e, e' \in G$ zwei neutrale Elemente. Weil e neutral ist, gilt $e \circ x = x$ für alle $x \in G$, insbesondere, $e \circ e' = e'$. Weil e' neutral ist, gilt $x \circ e' = x$ für alle $x \in G$, insbesondere, $e \circ e' = e$. Damit gilt $e' = e$.

Aufgabe 7. Seien $x = (x_G, x_H), y = (y_G, y_H), z = (z_G, z_H) \in G \times H$. Dann gilt $x \circ (y \circ z) = (x_G \circ (y_G \circ z_G), x_H \circ (y_H \circ z_H)) = ((x_G \circ y_G) \circ z_G, (x_H \circ y_H) \circ z_H) = (x \circ y) \circ z$. Das heißt, "$\circ$" ist assoziativ auf $G \times H$.

Seien $e_G \in G$ und $e_H \in H$ die neutralen Elemente von G und H. Wir setzen $e = (e_G, e_H) \in G \times H$. Dann ist e ein neutrales Element: für alle $x = (x_G, x_H) \in G \times H$ gilt $e \circ x = (e_G \circ x_G, e_H \circ x_H) = (x_G, x_H) = x$ und $x \circ e = (x_G \circ e_G, x_H \circ e_H) = (x_G, x_H) = x$.

Sei $x = (x_G, x_H) \in G \times H$. Seien $y_G \in G$ das Inverse von x_G und $y_H \in H$ das Inverse von x_H. Wir nennen $y = (y_G, y_H)$. Dann gilt $x \circ y = (x_G \circ y_G, x_H \circ y_H) = (e_G, e_H) = e$ und $y \circ x = (y_G \circ x_G, y_H \circ x_H) = (e_G, e_H) = e$, das heißt, y ist ein Inverses von x in $G \times H$.