

Linear Algebra I
Übungsblatt 5
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

- Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und sei $\emptyset \neq H \subseteq G$, sodass für alle $a, b \in H$ gilt $a \circ b^{-1} \in H$. Wir werden zeigen, dass $(H, \circ)$ eine Untergruppe von $(G, \circ)$ ist.

Weil H nicht leer ist, existiert $a \in H$. Sei $e \in G$ das neutrale Element von G . Dann liegt $e = a \circ a^{-1}$ in H .

Sei $x \in H$. Dann liegt $x^{-1} = e \circ x^{-1}$ in H , d.h., H ist abgeschlossen unter Inversen.

Seien $a, b \in H$. Dann liegt auch $b^{-1} \in H$ und $a \circ (b^{-1})^{-1} \in H$. Aber $(b^{-1})^{-1} = b$, d.h., es gilt $a \circ b \in H$ und somit ist H abgeschlossen unter „ $\circ$ “.

- Seien nun $(G, \circ)$ eine Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Wir werden zeigen, dass H nicht leer ist, und dass für alle $a, b \in H$ auch $a \circ b^{-1} \in H$ liegt.

Weil H eine Untergruppe ist, enthält H das Element e . Also $H \neq \emptyset$.

Seien $a, b \in H$. Aus der Abgeschlossenheit von H unter Inversen folgt, dass $b^{-1} \in H$ liegt. Danach gilt auch $a \circ b^{-1} \in H$, weil H abgeschlossen unter „ $\circ$ “ ist.

Aufgabe 2.

Wir nennen $A = \{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $C = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

- A ist keine Untergruppe, weil sie $(0, 0)$ nicht enthält.
- B ist eine Untergruppe: B ist nicht leer, z.B. weil $(1, 2) \in B$ liegt. Sei nun $(a, 2a), (b, 2b) \in B$. Von Aufgabe 1 folgt, dass es nur um $(a, 2a) - (b, 2b) \in B$ zu zeigen reicht. Es gilt: $(a, 2a) - (b, 2b) = (a - b, 2(a - b)) \in B$.
- C ist keine Untergruppe, weil sie nicht abgeschlossen unter Inversen ist. Z.B. liegt $(1, 1)$ in C aber nicht sein Inverses $(-1, -1)$.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring. Per Definition eines Ringes enthält R ein Element 1 , das neutral für „ $\cdot$ “ ist. Wir betrachten $a = 1 + 1 \in R$. Dann gilt wegen Distributivität für alle $b \in R$, dass $a \cdot b = (1 + 1) \cdot b = 1 \cdot b + 1 \cdot b = b + b$ ist, d.h., a ist ein „zwei-Element“.

Aufgabe 4. Wir müssen zeigen, dass $R^\times$ abgeschlossen unter „ $\cdot$ “ ist, dass $1 \in R^\times$ liegt, und dass alle $a \in R^\times$ ein Inverses $b \in R^\times$ besitzen. Assoziativität folgt aus der Definition eines Ringes.

Seien $a, b \in R^\times$. Dann existiert $a', b' \in R$ mit $aa' = a'a = 1 = bb' = b'b$, und gilt:

$$(b'a')(ab) = b'(aa')b = b'1b = b'b = 1 \text{ und } (ab)(b'a') = a(bb')a' = a1a' = aa' = 1$$

Das heißt, $ab \in R^\times$, und $R^\times$ ist abgeschlossen unter „ $\cdot$ “.

Weil $1 \cdot 1 = 1$ gilt, liegt 1 in $R^\times$.

Sei $a \in R^\times$. Dann existiert $b \in R$ mit $ab = ba = 1$. Das bedeutet, dass auch $b \in R^\times$ liegt.

Aufgabe 5.

- a) $(\mathbb{Q}, +)$ ist eine abelsche Gruppe und $\mathbb{Z}$ ist eine Untergruppe von $\mathbb{Q}$.
- b)
 - i) $\frac{2}{3} - (-\frac{1}{3}) = 1 \in \mathbb{Z}$, d.h., $\frac{2}{3} \sim -\frac{1}{3}$ und $-\frac{1}{3}$ ist ein Representant von $\overline{(\frac{2}{3})}$.
 - ii) $\frac{2}{3} - 0 \notin \mathbb{Z}$, d.h., 0 ist kein Representant von $\overline{(\frac{2}{3})}$.
 - iii) $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, d.h., $\frac{1}{3}$ ist kein Representant von $\overline{(\frac{2}{3})}$.
 - iv) $\frac{2}{3}$ ist natürlich ein Representant von $\overline{(\frac{2}{3})}$.
 - v) $\frac{2}{3} - 1 \notin \mathbb{Z}$, d.h., 1 ist kein Representant von $\overline{(\frac{2}{3})}$.
- c) $\overline{(\frac{2}{3})} + \overline{(\frac{5}{6})} = \overline{(\frac{2}{3} + \frac{5}{6})} = \overline{(\frac{3}{2})}$.
- d) $\overline{(\frac{2}{3})} + \overline{(\frac{5}{6})} = \overline{(-\frac{1}{3})} + \overline{(\frac{5}{6})} = \overline{(\frac{5}{6} - \frac{1}{3})} = \overline{(\frac{1}{2})}$. Das Ergebnis ist gleich wie bevor, weil $\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1$, d.h., $\overline{(\frac{3}{2})} = \overline{(\frac{1}{2})}$.
- e) Sei $a \in \mathbb{Q}$, dann existiert $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \leq a < n+1$, das heißt, $a - n \in M$. Weil $n \in \mathbb{Z}$ liegt, gilt $\bar{a} = \overline{(a - n)}$ und $\bar{a}$ hat mindestens ein Representant in M , nämlich $a - n$.
 Sei $a, b \in M$ mit $\bar{a} = \bar{b}$. Das heißt, es gibt $n \in \mathbb{Z}$ mit $a = b + n$. Aber $b \in M$, damit $0 \leq b < 1$; und $a \in M$, damit $0 \leq b + n < 1$ und $-n \leq b < 1 - n$. Davon folgt $-n < 1$ und $1 - n > 0$, oder $-1 < n < 1$; das gibt, $n = 0$ und $a = b$. Außer zu sagen: alle verschiedene Elemente in M liegen in verschiedene Nebenklassen in $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.
- f) $a \oplus b = \begin{cases} a + b & \text{wenn } a + b < 1 \\ a + b - 1 & \text{wenn } a + b \geq 1 \end{cases}$
- g) Aus e) folgt, dass die kanonische Abbildung $M \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, $a \mapsto \bar{a}$ eine Bijektion ist. Es gilt auch $\overline{(a \oplus b)} = \bar{a} + \bar{b}$. Weil $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ eine abelsche Gruppe ist, ist auch M eine abelsche Gruppe.
- h) Die Verknüpfung von M ist nicht gleich die Verknüpfung von $\mathbb{Q}$, z.B., $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, aber $\frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2} = 0$.