Prof. Immanuel Halupczok HHU Düsseldorf
Dr. Blaise Boissonneau Wintersemester 2024/25

**Linear Algebra I**
**Übungsblatt 6**
**Lösungsvorschlag**

**Aufgabe 1.** Sei $f \in K[x]$. Wir möchten zeigen, dass $n \in \mathbb{N}$, $b_1, \ldots, b_n \in K$ und $g \in K[x]$ ohne Nullstelle existieren, mit $f = \prod_{i=1}^{n}(x - b_i) \cdot g$.

- Wenn $f$ keine Nullstelle hat, dann gilt das Korollar für $f$, mit $n = 0$ und $g = f$.
- Wenn $\deg f = 0$, dann ist $f = a_0 x^0$, mit $a_0 \in K \setminus \{0\}$. Aber dann hat $f$ keine Nullstelle und sind wir fertig.
- Angenommen, dass das Korollar gilt für alle $\hat{f} \in K[x]$ mit $\deg \hat{f} < \deg f$. Entweder hat $f$ keine Nullstelle, dann sind wir fertig, oder $f$ hat eine Nullstelle, d.h., es gibt $b \in K$ mit $f(b) = 0$. Aus Satz 2.3.12 folgt, dass $\tilde{f} \in K[x]$ existiert mit $f = (x - b) \cdot \tilde{f}$. Weil $K$ ein Körper ist, gilt
$$\deg f = \deg(x - b) + \deg \tilde{f}.$$
Damit gilt $\deg \tilde{f} = \deg f - \deg(x - b) = \deg f - 1 < \deg f$. Per Induktion gibt es $m \in \mathbb{N}$, $b'_1, \ldots, b'_m \in K$ und $g \in K[x]$ ohne Nullstelle mit
$$\tilde{f} = \prod_{i=1}^{m}(x - b'_i) \cdot g.$$
Da $f = (x - b) \cdot \tilde{f}$ gilt das Korollar für $f$, mit $n = m + 1$, $(b_1, \ldots, b_n) = (b'_1, \ldots, b'_m, b)$ und $g$.

Wir möchten nun zeigen, dass $f$ maximal $\deg f$ viele verschiedene Nullstelle hat.
Wir schreiben $f$ als $\prod_{i=1}^{n}(x - b_i) \cdot g$, mit $g$ ohne Nullstelle. Sei $b \in K$ eine Nullstelle von $f$, dann gilt
$$f(b) = \prod_{i=1}^{n}(b - b_i) \cdot g(b) = 0.$$
Aber ein Produkt von Elementen eines Körpers ist gleich null gdw mindestens ein Term null ist, d.h., es gilt $(b - b_1 = 0) \vee \cdots \vee (b - b_n = 0) \vee (g(b) = 0)$. Weil $g$ keine Nullstelle hat, gilt $(b = b_1) \vee \cdots \vee (b = b_n)$. Das bedeutet, dass die Nullstellen von $f$ genau die $b_i$ sind, und $f$ hat maximal $n$ Nullstellen.
Wir zeigen nun das $n \leqslant \deg f$. Weil $K$ ein Körper ist, gilt:
$$\deg f = \deg(x - b_1) + \cdots + \deg(x - b_n) + \deg g = n + \deg g.$$
$g$ hat keine Nullstelle, insbesondere, $\deg g \neq -\infty$, und daraus folgt $\deg f = n + \deg g \geqslant n$.

**Aufgabe 2.** $3x + 2y = 4 \Leftrightarrow 2y = 4 - 3x$. Modulo 5 gilt $3 \cdot 2 = 1$, und $2y = 4 - 3x \Leftrightarrow 3 \cdot 2y = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 3x \Leftrightarrow y = 12 - 9x \Leftrightarrow y = 2 + x$. Die Gleichung hat 5 Lösungen:
$$(0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 0), (4, 1).$$

**Aufgabe 3.** Wir schauen die Koeffizientmatrix von $\underline{L}$ an. Wenn die $j$-te Spalte kein pivot-Eintrag enthält, dann kann $x_j$ beliebig in $\mathbb{F}_p$ gewahlen werden, d.h., es gibt $p$ viele Möglichkeiten für die Werte von $x_j$. Wenn die $j$-te Spalte ein pivot-Eintrag enthält, dann gibt es nur 1 Möglichkeit für $x_j$.

Sei $m$ die Anzahl der Spalten, die pivot-Einträge enthalten. Dann gibt es $p^m$ Möglichkeiten für eine Lösung von $\underline{L}$.

**Aufgabe 4.**

a) Nein: wenn $\deg f = 1$ gilt, ist $f = ax+b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$. Aber dann $f(\frac{b}{a}) = 0$ und $f$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{R}$. Dann kann $x^2 + 3$ nicht als $f \cdot g$ geschrieben werden, weil es keine Nullstelle in $\mathbb{R}$ hat.

b) Ja: $x^2 + 3 = (x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})$.

**Aufgabe 5.**

a) Modulo 5 gilt $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = (-2)^2 = 4$ und $4^2 = (-1)^2 = 1$. Also hat $x^2 - 3$ keine Nullstelle in $\mathbb{F}_5$.

b) Modulo 6 gilt $0^2 = 0$, $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 3$, $4^2 = (-2)^2 = 4$ und $5^2 = (-1)^2 = 1$. Also hat $x^2 - x$ vier Nullstellen.

**Aufgabe 6.**

a) Damit $K$ ein Unterring von $\mathbb{R}$ ist, reicht es, dass:

   i) $(K, +)$ eine Untergruppe von $(\mathbb{R}, +)$ ist, d.h., $0 \in K$ und $K$ ist abgeschlossen unter $+$ und $-$ ist;

   ii) $K$ abgeschlossen unter $\cdot$ ist,

   iii) und $1 \in K$ liegt.

   $0 = 0 + 0\sqrt{2}$ und $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ liegen in $K$. Seien nun $a + b\sqrt{2}$ und $a' + b'\sqrt{2} \in K$. Dann liegen $-a - b\sqrt{2}$ und $a + b\sqrt{2} + a' + b'\sqrt{2} = (a + a') + (b + b')\sqrt{2}$ in $K$. Auch gilt $(a + b\sqrt{2}) \cdot (a' + b'\sqrt{2}) = aa' + ab'\sqrt{2} + a'b\sqrt{2} + 2bb' = (aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2} \in K$.

b) Damit $K$ ein Unterkörper von $\mathbb{R}$ ist, fehlt nur, dass $K$ abgeschlossen unter $^{-1}$ ist. Sei $a + b\sqrt{2} \in K \setminus \{0\}$. Es gilt:

$$(a+b\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{a + b\sqrt{2}} = \frac{a - b\sqrt{2}}{(a + b\sqrt{2})(a - b\sqrt{2})} = \frac{a - b\sqrt{2}}{a^2 - 2b^2} = \frac{a}{a^2 - 2b^2} + \frac{-b}{a^2 - 2b^2}\sqrt{2}$$

   d.h., $(a + b\sqrt{2})^{-1} \in K$.

c) Wir bringen die Koeffizientmatrix von $\underline{L}$ in Normalform durch elementare Trasnformationen über $K$. Das ist möglich, weil $K$ ein Körper ist, und die neue Koeffizienten liegen auch in $K$. Weil $\underline{L}$ eine Lösung in $\mathbb{R}$ hat, gibt es dann keine Zeile der Form $(0, \ldots, 0 \mid b)$ mit $b \neq 0$. Aber dann sagt Bemerkung 1.1.15, dass eine Lösung in $K$ existiert.