Prof. Immanuel Halupczok — HHU Düsseldorf
Dr. Blaise Boissonneau — Wintersemester 2024/25

Linear Algebra I
Übungsblatt 7
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

Wir müssen zeigen, dass $(V \times W, +)$ eine abelsche Gruppe ist, dass $V \times W$ abgeschlossen unter $\cdot$ ist, und dass für alle $r, s \in K$ und alle $(v, w), (v'w') \in V \times W$ gilt:

a) $r \cdot ((v, w) + (v'w')) = r \cdot (v, w) + r \cdot (v'w')$,

b) $(r + s) \cdot (v, w) = r \cdot (v, w) + s \cdot (v, w)$,

c) $(r \cdot s) \cdot (v, w) = r \cdot (s \cdot (v, w))$,

d) $1 \cdot (v, w) = (v, w)$.

- Weil V und W Vektorräume sind, sind $(V, +)$ und $(W, +)$ abelsche Gruppen, und $(V \times W, +)$ ist auch eine abelsche Gruppe (siehe Blatt 4, Aufgabe 7).
- Seien $r \in K$ und $(v, w) \in V \times W$. Weil V ein Vektorraum ist, liegt $r \cdot v \in V$; analog liegt $r \cdot w \in W$. Dann liegt $r \cdot (v, w) = (r \cdot v, r \cdot w) \in V \times W$.
- Seien $r \in K$ und (v, w), $(v', w') \in V \times W$. Per Definition gilt $r \cdot ((v, w) + (v', w')) = r \cdot (v + v', w + w') = (r \cdot (v + v'), r \cdot (w + w'))$. Aber weil V ein Vektorraum ist, gilt $r \cdot (v + v') = r \cdot v + r \cdot v'$, und analog gilt $r \cdot (w + w') = r \cdot w + r \cdot w'$. Dann gilt $(r \cdot (v + v'), r \cdot (w + w')) = (r \cdot v + r \cdot v', r \cdot w + r \cdot w')$.

  Außerdem gilt $r \cdot (v, w) + r \cdot (v', w') = (r \cdot v, r \cdot w) + (r \cdot v', r \cdot w') = (r \cdot v + r \cdot v', r \cdot w + r \cdot w')$. Am Ende haben wir $r \cdot ((v, w) + (v', w')) = r \cdot (v, w) + r \cdot (v'w')$, d.h., a) gilt.
- Seien $r, s \in K$ und $(v, w) \in V \times W$. Dann gilt b):

$$\begin{aligned}(r + s) \cdot (v, w) &= ((r + s) \cdot v, (r + s) \cdot w) \\ &= (r \cdot v + s \cdot v, r \cdot w + s \cdot w) \\ &= (r \cdot v, r \cdot w) + (s \cdot v, s \cdot w) \\ &= r \cdot (v, w) + s \cdot (v, w).\end{aligned}$$

- Seien $r, s \in K$ und $(v, w) \in V \times W$. Dann gilt c):

$$\begin{aligned}(r \cdot s) \cdot (v, w) &= ((r \cdot s) \cdot v, (r \cdot s) \cdot w)) \\ &= (r \cdot (s \cdot v), r \cdot (s \cdot w)) \\ &= r \cdot (s \cdot v, s \cdot w) \\ &= r \cdot (s \cdot (v, w)).\end{aligned}$$

- Sei $(v, w) \in V \times W$. Dann gilt $1 \cdot (v, w) = (1 \cdot v, 1 \cdot w) = (v, w)$, d.h., d) gilt.

Aufgabe 2.

a) $\mathbb{Q}^2$ ist kein Untervektorraum, weil es nicht abgeschlossen unter Skalarmultiplikation ist. Z.B. $\sqrt{2} \cdot (0,1) \notin \mathbb{Q}^2$.

b) $A = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist kein Untervektorraum, weil es nicht abgeschlossen unter $+$ ist. Z.B. $(1,1) + (1,1) \notin A$.

c) $\mathbb{R}^2$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

d) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 2y = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$, weil es die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungsystems ist.

Aufgabe 3.

a) Ja: seien $A \subseteq B \subseteq V$, und sei $x \in \langle A \rangle_K$. Per Definition lässt sich x schreiben als $x = \sum_{i=1}^n r_i \cdot v_i$ mit $r_1, \ldots, r_n \in K$ und $v_1, \ldots, v_n \in A$. Aber seit $A \subseteq B$, gilt auch $v_1, \ldots, v_n \in B$, und x liegt in $\langle B \rangle_K$, d.h., $\langle A \rangle_K \subseteq \langle B \rangle_K$.

b) Nein: seien $V = \mathbb{R}^2$ (über $K = \mathbb{R}$), $A = \{(1,1)\}$ und $B = \{(1,1),(2,2)\}$. Dann $\langle A \rangle_K = \langle B \rangle_K = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

c) Nein: seien $B \subseteq V$ belibig und $A := \langle B \rangle_K$. Dann $\langle A \rangle_K = A$.

d) Ja: Sei $A \subseteq V$ mit $A = \langle A \rangle_K$. Da $\langle A \rangle_K$ ein Untervektorraum ist, ist auch A ein Untervektorraum.

Sei nun $A \subseteq V$ ein Untervektorraum. Da $\langle A \rangle_K$ der kleinste Unvektorraum ist, der A enthält, und da $A \subseteq A$, gilt $\langle A \rangle_K \subseteq A$. Natürlich gilt auch $A \subseteq \langle A \rangle_K$, d.h., $A = \langle A \rangle_K$.

Aufgabe 4. Sei V ein Vektorraum über ein Körper K. Sei $r \in K$. Per Definition gilt $0 + 0 = 0$ in V, und $r \cdot 0$ besitzt ein Inverses $v \in V$, d.h., $r \cdot 0 + v = 0$. Daraus folgt:

$$0 = r \cdot 0 + v = r \cdot (0 + 0) + v = (r \cdot 0 + r \cdot 0) + v = r \cdot 0 + (r \cdot 0 + v) = r \cdot 0 + 0 = r \cdot 0.$$

Aufgabe 5.

a) Per Definition ist $U = \{av_1 + bv_2 + cv_3 \mid a,b,c \in \mathbb{R}\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a+c \\ -a+b \\ -b-c \end{smallmatrix} \right) \middle| \ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$.

b) Es gilt $v_3 = v_1 + v_2$, oder $v_1 + v_2 - v_3 = 0$.

c) In die lineare Abhangigkeit „$v_1 + v_2 - v_3 = 0$“ ist keiner der Koeffizienten null. Aus Lem. 3.3.2 folgt, dass wir sowohl v_1 als auch v_2 als auch v_3 weglassen können und auch U als Erzeugnis erhalten.

Aufgabe 6.

a) Seien $r \neq r' \in K$ und $v \in V$. Dann $r - r' \neq 0$, und weil K ein Körper ist, existiert $(r-r')^{-1} \in K$. Wenn $(r-r') \cdot v = 0$, dann $(r-r')^{-1} \cdot ((r-r') \cdot v) = (r-r')^{-1} \cdot 0 = 0$ (aus Auf. 4). Aber $(r-r')^{-1} \cdot ((r-r') \cdot v) = ((r-r')^{-1} \cdot ((r-r')) \cdot v = v$, d.h., $v = 0$ gilt, oder wenn $v = 0$, dann $r \cdot v \neq r' \cdot v$.

b) Wenn $v = 0$, dann $U = \{0\}$ hat genau ein Element. Wenn $v \neq 0$, dann $U = \{0, v, \ldots, (p-1)v\}$. Diese Elemente sind paarweise verschiedene aus Teil a), daraus folgt $\#U = p$.

c) $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_{\mathbb{F}_p}$ hat p^m viele Elemente, mit $0 \leqslant m \leqslant n$. Wir können das zeigen per Induktion über n: für $n = 1$, das Ergebnis gilt aus b). Angenommen, dass für alle $w_1, \ldots, w_{n-1} \in V$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, mit $\langle w_1, \ldots, w_{n-1} \rangle_{\mathbb{F}_p} = p^m$ und $0 \leqslant m \leqslant n-1$. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$.

   Wenn $v_1, \ldots, v_n$ lineare unabhängig sind, dann enthält $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ die Elemente $\sum_{i=1}^n a_i v_i$ mit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{F}_p^n$. Diese Elemente sind paarweise verschiedene, weil wenn $\sum_{i=1}^n a_i v_i = \sum_{i=1}^n a_i' v_i$ gilt fur $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \neq (a_i')_{1 \leqslant i \leqslant n}$, gilt auch $\sum_{i=1}^n (a_i - a_i') v_i = 0$ und das ist eine lineare Abhängigkeit. Am Ende gilt $\#\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_{\mathbb{F}_p} = \#\mathbb{F}_p^n = p^n$.

   Wenn nun $v_1, \ldots, v_n$ lineare abhängig sind, dann gibt es $w_1, \ldots w_{n-1} \in \{v_1, \ldots, v_n\}$ mit $\langle w_1, \ldots, w_{n-1} \rangle_{\mathbb{F}_p} = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle_{\mathbb{F}_p}$. Dann gilt per Induktion $\#\langle w_1, \ldots, w_{n-1} \rangle_{\mathbb{F}_p} = p^m$ und wir sind fertig.