Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Wintersemester 2024/25

Linear Algebra I
Übungsblatt 8
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) Seien $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ eine Basis von V und $\{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq V$ linear unabhängig aber keine Basis von V. Angenommen, dass $v_i \in \langle w_1, \ldots, w_k\rangle_K$ liegt für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dann haben wir $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle_K \subseteq \langle w_1, \ldots, w_k\rangle_K$. Aber $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle_K = V$ weil $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist. Daraus folgt $V = \langle w_1, \ldots, w_k\rangle_K$, und das widerspricht die Definition von $\{w_1, \ldots, w_k\}$ als „keine Basis".

Wir wissen jetzt, dass mindestens ein i existiert mit $v_i \notin \langle w_1, \ldots, w_k\rangle_K$. Aus Satz 3.3.3 folgt, dass $\{w_1, \ldots, w_k, v_i\}$ auch linear unabhängig ist.

b) Seien $B = \{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V$ eine Basis von V und $C = \{w_1, \ldots, w_k\} \subseteq V$ lineare unabhängig. Wir konstruiren per Induktion über i eine Folge von Mengen $(W_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ so dass für jede i:

- $C \subseteq W_i \subseteq C \cup B$,
- W_i ist linear unabhängig,
- $\{v_1, \ldots, v_i\} \subseteq \langle W_i\rangle_K$.

Für $i = 0$, wir setzen $W_0 = C$. Per Definition erfüllt W_0 alle drei Eigenschaften. Sei nun $i < n$. Angenommen W_i mit diese drei Eigenschaften, wir definieren W_{i+1} so folgt:

$$W_{i+1} = \begin{cases} W_i \cup \{v_{i+1}\} & \text{Wenn } v_{i+1} \notin \langle W_i\rangle_K \\ W_i & \text{Wenn } v_{i+1} \in \langle W_i\rangle_K \end{cases}$$

Dann W_{i+1} bleibt linear unabhängig, $C \subseteq W_i \subseteq W_{i++1} \subseteq W_i \cup \{v_{i+1}\} \subseteq C \cup B$, und $\{v_1, \ldots, v_{i+1}\} \subseteq \langle W_{i+1}\rangle_K$.

Wir betrachten W_n. Weil $C \subseteq W_n \subseteq C \cup B$ gilt, existiert $B' \subseteq B$ mit $W_n = C \cup B'$; nämlich, $B' = Wn \setminus C$. Aus der Konstruktion folgt, dass W_n linear unabhängig ist, und dass $V = \langle B\rangle_K \subseteq \langle W_n\rangle_K$ gilt, d.h., $\langle W_n\rangle_K = V$ gilt und W_n ist eine Basis von V.

Zu zeigen gibt es noch, dass $\#B' = n - k$. Wir haben $\#B = n$ und $\#W_n = \#C + \#B' = k + \#B'$. Aber aus Satz 3.4.7 folgt, dass $\#W_n = \#B = n$; dann gilt $\#B' = n - k$.

Aufgabe 2.

a) Die Vektoren sind linear abhängig: $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ihr Erzeugnis hat Dimension 1, und sie sind keine Basis von $\mathbb{R}^2$.

b) Ein (nicht null) Vektor allein ist immer linear unabhängig. Sein Erzeugnis hat Dimension 1, und er ist keine Basis von $\mathbb{R}^2$.

c) idem.

d) Drei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ sind immer linear abhängig. Ihr Erzeugnis hat Dimension 2 aber sie sind keine Basis von $\mathbb{R}^2$.

e) Die Vektoren sind lineare unabhängig: angenommen, dass $a\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}20\\31\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.
Dann $2a + 20b = 0$, oder $a = -10b$, und $3a + 31b = 0$ implizert $-30b + 31b = 0$ oder $b = 0$. Daraus folgt $a = 0$, d.h., keine Linearkombination existiert, die null ist, außer die Nullkombination.

Ihr Erzeugnis hat Dimension 2 und sie sind eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

f) Der Nullvektor ist immer linear abhängig, sein Erzeugnis hat dimension 0 und er ist keine Basis.

Aufgabe 3.

a) Wir zeigen, dass die Familie $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ linear unabhängig ist. Seien $a, b, c \in \mathbb{Q}$ mit $a\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Dann (a, b, c) ist eine Lösung der folgender LGS:

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= 0 \\ 2a + c &= 0 \\ 3b + 4c &= 0 \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung ist $(0, 0, 0)$, d.h., $a, b, c \in \mathbb{Q}$ sind sodass $a\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ gilt gdw. $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, und die Familie ist linear unabhängig.

Aus Auf. 4 folgt, dass die Familie eine Basis von $\mathbb{Q}^3$ ist.

b) Wir müssen die folgende Gleichung lösen:

$$a\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-9\\2\end{pmatrix}$$

oder

$$\begin{aligned} a + 3b + c &= 1 \\ 2a + c &= -9 \\ 3b + 4c &= 2 \end{aligned}$$

Die eindeutige Lösung ist $(-4, 2, -1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.

Per Definition einer Basis, wenn $v_1, \dots, v_n$ eine Basis bilden, sind sie linear unabhängig und erzeugen sie V. D.h., (iii)$\Rightarrow$(ii)$\wedge$(i).

Seien nun $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig und sei $v \in V$. Angenommen, dass $v \notin \langle v_1, \dots, v_n \rangle_K$. Dann ist auch $v_1, \dots, v_n, v$ linear unabhängig. Aber aus Auf. 1, können wir diese Menge zu einer Basis verlängern; das heißt, es gibt eine Basis, die $\{v_1, \dots, v_n, v\}$ enthält. Aber diese Basis hat jetzt Kardinalität $> n$, d.h., $\dim(V) > n$.

Wir haben gezeigt, dass wenn $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängig sind und $\dim(V) = n$ gilt, liegen alle $v \in V$ in $\langle v_1, \dots, v_n \rangle_K$, d.h, $v_1, \dots, v_n$ erzeugt V; und dann bildet auch $v_1, \dots, v_n$ eine Basis. D.h., (i)$\Rightarrow$(ii)$\wedge$(iii).

Seien nun $v_1, \dots, v_n \in V$ mit $\langle v_1, \dots, v_n \rangle_K = V$. Angenommen, dass $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear abängig ist. Dann existiert i mit $\langle \{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_i\} \rangle_K = \langle v_1, \dots, v_n \rangle_K$. Das bedeutet, dass ein Erzeugendensystem von V mit Kardinalität $n-1$ existiert. Sei nun eine Basis B von V, weil $\dim(V) = n$ ist, gilt $\#B = n$; aber $n > n-1$ und Lemma 3.4.6 impliziert, dass B linear abhägig ist, eine Widerspruch.

Wir haben gezeigt, dass wenn $v_1, \dots, v_n$ der ganz V erzeugen und $\dim(V) = n$ ist, muss $\{v_1, \dots, v_n\}$ linear abängig sein, und dann bilden sie eine Basis. D.h., (ii)$\Rightarrow$(i)$\wedge$(iii).

Aufgabe 5.

a) Nein: Aus $\{0\} \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq U_3 \subsetneq \mathbb{C}^3$ folgt $0 < \dim(U_1) < \dim(U_2) < \dim(U_3) < 3$. Aber dann $1 < \dim(U_2) < 2$ und das kann nicht sein.

b) Nein: Für beliebige Untervektorraüme U_1, U_2 eines Vektorraums V gilt

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2).$$

Hier U_1, U_2 sind Untervektorraüme von $\mathbb{C}^3$, und da auch $U_1 + U_2 \subseteq \mathbb{C}^3$. Dann ist $\dim(U_1 + U_2) \leqslant 3$. Aber $\dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) = 2 + 2 - 0 = 4 > 3$.

Aufgabe 6.

a) Weil $\dim(V) = d$, existieren $v_1, \dots, v_d \in V$, die eine Basis bilden. Dann ist die Abbidlung $f \colon \mathbb{F}_p^d \to V$, $(a_1, \dots, a_d) \mapsto \sum_{i=1}^d a_i v_i$ bijektiv, und gilt $\#V = \#\mathbb{F}_p^d = (\#\mathbb{F}_p)^d = p^d$.

b) Wenn V unendlich dimensional ist, dann existiert eine Folge $(v_i)_{i \in \mathbb{N}} \in V^{\mathbb{N}}$ lineare unabhängig. Insbesondere, alle v_i sind paarweise verschiedene; d.h., es existiert unendliche viele Elemente in V.

c) Seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann ist $d = \dim(\langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{F}_p}) \leqslant n$ und $\#\langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{F}_p} = p^d$.