Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Wintersemester 2024/25

Linear Algebra I
Übungsblatt 9
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) Seien $v_1, \cdots v_n \in V$ linear abhängig, dann existiert $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ mit $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$. Wir nennen $w = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, dann gilt $Aw = \sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$, und natürlich $A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h., $w \mapsto Aw$ ist nicht injektiv.

Seien nun $v_1, \cdots v_n$ linear unabhängig, und seien $w_1, w_2 \in K^n$ mit $Aw_1 = Aw_2$. Dann gilt $A(w_1 - w_2) = 0$. Wir schreiben $w_1 - w_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ mit $a_1, \ldots, a_n \in K$. Dann gilt $A(w_1 - w_2) = \sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$. Aber $v_1, \cdots v_n$ sind linear unabhängig, da $(a_1, \ldots, a_n) = (0, \ldots, 0)$ und $w_1 = w_2$, d.h., $w \mapsto Aw$ ist injektiv.

b) Sei $f\colon K^n \to K^m$ die Abbildung definiert durch $f(w) = Aw$.

Bem. 4.1.5 besagt, dass $\operatorname{im}(f) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K$, und daraus folgt, dass f surjektiv ist gdw. $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K = K^m$ gilt.

Aus „(a)“ foglt dann, dass f bijektiv ist gdw. f injektiv und surjektiv ist gdw. $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind und $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K = K^m$ gilt, d.h., $v_1, \ldots, v_n$ bilden eine Basis von K^m.

Aufgabe 2.

a) Die Produkte AC, BA, und BB sind definiert, die anderen nicht.

b)

$$AC = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad BB = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

c) A definiert eine Abbildung von $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^2$. Sei $v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ mit $Av = 0$:

$$Av = \begin{pmatrix} a + b + c \\ a + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt $Av = 0$ gdw. $\exists a \in \mathbb{R}$ mit $v = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4.

a) $f_1(2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = 4$ aber $2f_1(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = 2$, d.h., f_1 ist nicht linear.

b) $f_2(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h., f_2 ist nicht linear.

c) f_3 ist linear, weil $f_3(v) = Av$ mit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.

a) Ja: Sei $v \in V$, dann $f(-v) = f((-1) \cdot v) = (-1) \cdot f(v) = -f(v)$.

b) Seien $V = \mathbb{R}^2$ und $W = \mathbb{R}$, und sei $f\colon V \to W$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto a$. Dann schickt f alle Vektoren der Form $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ nach 0, aber $f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}) = 1$.

c) Seien $V \neq \{0\}$ und $W = \{0\}$. Seien $v_1, \dots, v_n \in V$ linear unabhängig und $f\colon V \to W$ linear, dann $f(v_i) = 0$ für alle i und die sind linear abhängig.

Aufgabe 6.

a)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Seien $v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann können wir $w_1' := f(v_1') = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w_2' := f(v_2') = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ setzen.

Es gibt genau eine lineare Abbildung, die (v_1, v_2) nach (w_1, w_2) schickt – nämlich, f – und genau eine lineare Abbildung, die (v_1', v_2') nach (w_1', w_2') schickt – nämlich, auch f. Das ist kein Widerspruch, weil $\{v_1, v_2\} \neq \{v_1', v_2'\}$.