Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Wintersemester 2024/25
25.03.2025

Aufgaben der Nachklausur Lineare Algebra 1

Aufgabe 1 (3+3+2 Punkte):

(a) Seien A und B beliebige Mengen und sei $f\colon A \to B$ eine beliebige Abbildung. Zeigen Sie, dass die folgende Relation $\sim_f$ eine Äquivalenzrelation auf A ist:

$$a_1 \sim_f a_2 \iff f(a_1) = f(a_2)$$

(b) Sei nun $A = \{1, 2, \ldots, 30\}$, $B = \{0, 1, \ldots, 9\}$, und sei $f\colon A \to B$ die Abbildung, die jede Zahl aus A auf ihre erste Ziffer abbildet. (Also z. B. $f(4) = 4$ und $f(23) = 2$.)
 (i) Geben Sie die Äquivalenzklasse $13/\sim_f$ an.
 (ii) Aus wie vielen Elementen besteht $A/\sim_f$?

(c) Sei nun A wieder eine beliebige Menge, B eine endliche Menge und $f\colon A \to B$ eine beliebige Abbildung. (Sei weiterhin $\sim_f$ wie in (a) definiert.) Begründen Sie, dass $\#(A/\sim_f) \leq \#B$ ist.

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte):

(a) Für welche $b \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ gilt $b + b + b = \bar{3}$?

(b) Wie viele Elemente b existieren in $\mathbb{F}_3$, die $b + b + b = \bar{2}$ erfüllen?

(c) In welchen der folgenden Körper existiert ein multiplikatives Inverses von $\bar{3}$?
(i) $\mathbb{F}_2$ (ii) $\mathbb{F}_3$ (iii) $\mathbb{F}_5$ (iv) $\mathbb{F}_{97}$
(Anmerkung: 97 ist eine Primzahl; dies können Sie verwenden, ohne es zu prüfen.)

(d) Zeigen Sie: Ist K ein Körper und $a \in K \setminus \{0\}$, so existiert höchstens ein $b \in K$ mit $b + b + b = a$.
Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung danach, ob $1 + 1 + 1 = 0$ in K gilt.

Aufgabe 3 (2+2+2+2 Punkte):

Sei $U = \{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

(a) Geben Sie eine Basis von U an.

(b) Seien nun außerdem $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie: $\dim(\langle v_1, v_2\rangle_{\mathbb{R}} \cap U) = 1$.

(c) Zeigen Sie, dass es nicht möglich ist, die obigen Vektoren v_1, v_2 durch Vektoren $u_1, u_2 \in U$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$ zu ergänzen.

(d) Wir nehmen nun an, dass $v_1', v_2' \in \mathbb{R}^4$ linear unabhängige Vektoren sind und dass $\dim(\langle v_1', v_2'\rangle_{\mathbb{R}} \cap U) = 0$ ist. Außerdem sei u_1, u_2 eine beliebige Basis von U. Zeigen Sie, dass dann u_1, u_2, v_1', v_2' immer eine Basis von $\mathbb{R}^4$ ist.

Aufgabe 4 (3+2+3 Punkte):

Geben Sie bei den folgenden Fragen jeweils ein konkretes Beispiel einer Matrix A_i an oder begründen Sie, dass eine solche Matrix nicht existiert.

(a) Gibt es eine Matrix $A_1 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die genau zwei verschiedene Vektoren (und keine weiteren) auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ abbildet?

(b) Gibt es eine Matrix $A_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ vom Rang 2, die 0 als Eigenwert hat?

(c) Gibt es eine Matrix $A_3 \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, die nicht die Identitätsmatrix ist, aber so dass für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ gilt: $\langle Av, w\rangle = \langle v, w\rangle$? Hierbei bezeichnet $\langle v, w\rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.
Hinweis: Was erhält man, wenn man für v und w jeweils $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ wählt?

Aufgabe 5 (2+2+3+1 Punkte):

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie die Determinante von A. Ist A invertierbar?

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(c) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^5$ die Menge aller Eigenvektoren von A. Bestimmen Sie die Dimension $\dim\langle M\rangle_{\mathbb{R}}$ des Erzeugnisses von M.

(d) Ist A diagonalisierbar?