Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Wintersemester 2024/25

Linear Algebra I
Klausur
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a)
- Sei $a \in A$. Natürlich gilt $f(a) = f(a)$ und daraus folgt $a \sim_f a$. D.h., $\sim_f$ ist reflexiv.
- Seien $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \sim_f a_2$. Per Definition gilt $f(a_1) = f(a_2)$, und daraus folgt $a_2 \sim_f a_1$. D.h., $\sim_f$ ist symmetrisch.
- Seien $a_1, a_2, a_3 \in A$ mit $a_1 \sim_f a_2$ und $a_2 \sim_f a_3$. Dann gelten $f(a_1) = f(a_2)$ und $f(a_2) = f(a_3)$. Also folgt $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3)$. Dann gilt $f(a_1) = f(a_3)$ oder $a_1 \sim_f a_3$. D.h., $\sim_f$ ist transitiv.

b)
i) Per Definition von $\sim_f$ gilt $13/{\sim_f} = \{a \in A \mid a \sim_f 13\} = \{a \in A \mid f(a) = f(13)\}$. Hier haben wir $f(13) = 1$, d.h., $13/{\sim_f} = \{a \in A \mid f(a) = 1\} = f^{-1}(1)$. Offensichtlich gilt $f^{-1}(1) = \{1, 10, 11, \ldots, 19\}$.

ii) Die Zahlen $1, 2, \ldots, 9 \in A$ liegen alle in verschidene Äquivalenzklassen, d.h., $\#(A/{\sim_f}) \geqslant 9$. Aber alle Zahlen fangen an mit $1, 2, \ldots$ oder 9, d.h., alle Zahlen liegen in (genau) einer der Klassen $1/{\sim_f}, 2/{\sim_f}, \ldots, 9/{\sim_f}$.

c) Wir definieren eine Abbildung $\hat{f}\colon A/{\sim_f} \to B$ durch $\hat{f}(a/{\sim_f}) = f(a)$.

Als erstes wollen wir zeigen, dass $\hat{f}$ wohldefiniert ist: Seien $a, a' \in A$ mit $a/{\sim_f} = a'/{\sim_f}$. Per Definition gilt $f(a) = f(a')$, und daraus folgt $\hat{f}(a/{\sim_f}) = \hat{f}(a'/{\sim_f})$.

Wir zeigen nun, dass $\hat{f}$ injektiv ist: seien $a, a' \in A$ mit $\hat{f}(a/{\sim_f}) = \hat{f}(a'/{\sim_f})$. Per definition von $\hat{f}$ haben wir $f(a) = f(a')$ und per Definition von $\sim_f$ haben wir $a \sim_f a'$. Aber dann gilt $a'/{\sim_f} = a/{\sim_f}$ und $\hat{f}$ ist injektiv.

Aus Injektivität von $\hat{f}$ folgt, dass $\#(A/{\sim_f}) \leqslant \#B$.

Aufgabe 2.

a)
- $\overline{0} + \overline{0} + \overline{0} = \overline{0} \neq \overline{3}$
- $\overline{1} + \overline{1} + \overline{1} = \overline{3}$
- $\overline{2} + \overline{2} + \overline{2} = \overline{6} = \overline{0} \neq \overline{3}$
- $\overline{3} + \overline{3} + \overline{3} = \overline{9} = \overline{3}$
- $\overline{4} = \overline{-2}$, und $\overline{-2} + (\overline{-2}) + (\overline{-2}) = \overline{-6} = \overline{0} \neq 3$
- $\overline{5} = \overline{-1}$, und $\overline{-1} + (\overline{-1}) + (\overline{-1}) = \overline{-3} = \overline{3}$.

Es gibt drei $b \in \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ mit $b + b + b = \overline{3}$: $\overline{1}$, $\overline{3}$ und $\overline{5}$.

b)
- $\overline{0} + \overline{0} + \overline{0} = \overline{0} \neq \overline{2}$
- $\overline{1} + \overline{1} + \overline{1} = \overline{3} = \overline{0} \neq \overline{2}$

- $\overline{2} = \overline{-1}$, und $\overline{-1} + (\overline{-1}) + (\overline{-1}) = \overline{-3} = \overline{0} \neq \overline{2}$.

  Es gibt kein $b \in \mathbb{F}_3$ mit $b + b + b = \overline{2}$.

c) i) $\overline{3} = \overline{1}$ in $\mathbb{F}_2$, und $\overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1}$. D.h., $\overline{1}$ ist ein multiplikatives Inverses von $\overline{3}$ in $\mathbb{F}_2$.

ii) $\overline{3} = \overline{0}$ in $\mathbb{F}_3$, und $\overline{0}$ hat kein multiplikatives Inverses in einem Ring, insbesondere in $\mathbb{F}_3$.

iii) $\overline{3} \cdot \overline{2} = \overline{6} = \overline{1}$ in $\mathbb{F}_5$. D.h., $\overline{2}$ ist ein multiplikatives Invers von $\overline{3}$ in $\mathbb{F}_5$.

iv) Weil 97 prim ist, ist $\mathbb{F}_{97} = \mathbb{Z}/97\mathbb{Z}$ ein Körper. $\overline{3} \neq \overline{0}$ in $\mathbb{F}_{97}$ (weil 3 kein Vielfaches von 97 ist). Per Definition eines Körper existiert für jedes nicht null Element ein multiplikatives Inverses, insbesondere, $\overline{3}$ besitzt ein Inverses in $\mathbb{F}_{97}$. Nähmlich: $\overline{3} \cdot \overline{65} = \overline{3} \cdot (\overline{-32}) = \overline{-96} = \overline{1}$.

d) Sei $b \in K$. Aus der Definition eines Ringes folgt, dass $b+b+b = 1 \cdot b + 1 \cdot b + 1 \cdot b = (1+1+1) \cdot b$, wo 1 das Eins-Element von K ist. Wir nennen $c = (1+1+1)$. Entweder $c = 0$ (z.B. für $K = \mathbb{F}_3$) oder $c \neq 0$ (z.B. für $K = \mathbb{F}_5$).

Sei nun $a \in K \backslash \{0\}$. Falls $c = 0$, dann gilt für alle $b \in K$, dass $b+b+b = (1+1+1) \cdot b = c \cdot b = 0 \cdot b = 0$ gilt. Es gilt aber $a \neq 0$, d.h., es gibt keine $b \in K$ mit $b + b + b = a$.

Falls $c \neq 0$, dann gibt es per Definition eines Körpers ein Inverses von c in K, wir nennen es c^{-1}. Dann $b + b + b = a \Leftrightarrow c \cdot b = a \Leftrightarrow c^{-1} \cdot c \cdot b = c^{-1} \cdot a \Leftrightarrow b = c^{-1} \cdot a$. D.h., es gibt genau ein b mit $b + b + b = a$, nähmlich, $b = c^{-1} \cdot a$.

Aufgabe 3.

a) Eine Basis von U ist $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$: offensichltich sind diese zwei Vektoren linear unabhängig, und jeder Vektor $\begin{pmatrix}a\\b\\b\\0\end{pmatrix} \in U$ kann als $a \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + b \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ geschrieben sein.

b) Wir nennen $V = \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{R}}$.

$v_1 + 2v_2 = \begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix} \in V \cap U$, d.h., $V \cap U \neq \{0\}$ und $\dim(V \cap U) \geqslant 1$.

Offensichtlich sind v_1, v_2 und $\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$ linear unabhängig: seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $av_1 + bv_2 + c \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$. Wir haben $av_1 + bv_2 + c \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\2a+c\\b+c\\-b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$, daraus folgt $a = 0$, $-c = 0$ und $c = 0$, und zuletzt $b + c = 0$ und $b = 0$.

Dann ist $\dim(V+U) \geqslant 3$, aber $\dim(V \cap U) = \dim V + \dim U - \dim(V+U) = 4 - \dim(V+U) \leqslant 4-3 = 1$.

Daraus folgt, dass $\dim(V \cap U) = 1$ ist.

c) Aus $\dim(V \cap U) = 1$ folgt, dass $\dim(V+U) = \dim V + \dim U - \dim(V \cap U) = 3$ ist. Die Vektoren $v_1, v_2 \in V$ und $u_1, u_2 \in U$ sind vier Vektoren in $V+U$ und sind dann linear abhängig, insbesondere können sie keine Basis bilden.

d) Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $av_1' + bv_2' + cu_1 + du_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $av_1' + bv_2' = -cu_1 - du_2$.

Aber $av_1' + bv_2' \in \langle v_1', v_2' \rangle_{\mathbb{R}}$ gilt und $-cu_1 - du_2 \in U$ gilt, d.h., $av_1' + bv_2' \in \langle v_1', v_2' \rangle_{\mathbb{R}} \cap U$. Weil $\langle v_1', v_2' \rangle_{\mathbb{R}} \cap U$ null-dimensional ist, gilt $av_1' + bv_2' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Da v_1', v_2' linear unabhängig sind, haben wir $a = 0$ und $b = 0$.

Es gilt nun $cu_1 + du_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Weil u_1, u_2 eine Basis von U bilden, sind sie insbesondere linear unabhängig, und wir haben $c = 0$ und $d = 0$, d.h., v_1', v_2', u_1, u_2 sind linear unabhängig, und dann auch eine Basis von $\mathbb{R}^4$, weil sie vier linear unabhängig Vektoren in einem vier-dimensionalen Vektorraum sind.

Aufgabe 4.

a) Nein: Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ zwei verschiedene Vektoren mit $Av_1 = Av_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sei nun $v_3 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$. Offensichtlich ist $v_3 \neq v_1$, da $v_3 - v_1 = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2 - v_1 = \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{2}v_1 = \frac{1}{2}(v_1 - v_2)$, und $v_2 - v_1 \neq 0$ weil $v_1 \neq v_2$. Analog ist $v_3 \neq v_2$.

es gilt aber auch $Av_3 = A(\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2) = \frac{1}{2}(Av_1 + Av_2) = \frac{1}{2}(2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, d.h., A kann nicht genau zwei Vektoren nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ abbilden.

Alternativlösung: Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, dann ist „$Av = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$“ ein LGS über $\mathbb{R}$. Ein solch LGS kann entweder keine, genau eine, oder unendliche viele Lösungen haben; insbesondere kann es nicht genau zwei haben.

b) Nein: wenn 0 ein Eigenwert von A ist, existiert $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ mit $Av = 0v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann liegt $v \in \ker A$ und $\dim \ker A \geqslant 1$, aber $\operatorname{rk} A = 2 - \dim \ker A$ kann jetzt nicht 2 sein.

c) Nein: sei A eine solche Matrix. Wir betrachten $\langle Ae_1, e_2 \rangle$, wobei e_1, e_2 die kannonische Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

Wir haben $\langle Ae_1, e_2\rangle = \langle e_1, e_2\rangle = 0$. Wir schreiben Ae_1 als $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, mit $a, b \in \mathbb{R}$. Dann $\langle Ae_1, e_2\rangle = \langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\rangle = b$, und daraus folgt $b = 0$ und $Ae_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$.

Wir betrachten nun $\langle Ae_1, e_1\rangle$. Wir haben $\langle Ae_1, e_1\rangle = \langle e_1, e_1\rangle = 1$ und $\langle Ae_1, e_1\rangle = \langle \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\rangle = a$, d.h., $a = 1$ und $Ae_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$.

Analog können wir zeigen, dass $Ae_2 = e_2$.

Daraus folgt, dass $A = I$ ist, weil e_1, e_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

Aufgabe 5.

a) $\det A = 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2{\cdot}2 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2{\cdot}2{\cdot}2 \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2{\cdot}2 = 32 \neq 0$: A ist invertierbar.

b) $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^5$, d.h., 2 ist der eindeutig Eigenwert von A.

c) Wir haben $A - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Diese Matrix hat Rang 3, weil die erste, zweite und dritte Zeile linear unabhängig sind und die zwei anderen null sind. Dann gilt $\dim \ker(A - 2I) = 2$. Aber $\langle M\rangle_{\mathbb{R}} = \ker(A - 2I)$, so $\dim\langle M\rangle_{\mathbb{R}} = 2$.

d) Nein: weil $\dim\langle M\rangle_{\mathbb{R}} = 2$, können wir höchstens zwei linear unabhängige Eigenvektoren nehmen, d.h., es gibt keine Basis von $\mathbb{R}^5$, die nur Eigenvektoren von A enthält.