Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Immanuel Halupczok

Wintersemester 2024/25

Probeklausur Lineare Algebra I

Ich habe versucht, diese Probeklausur vom Umfang, von der Art und von der Schwierigkeit der Aufgaben ähnlich wie die eigentlichen Klausuren zu machen. Insbesondere werden auch die eigentlichen Klausuren jeweils aus 5 Aufgaben bestehen, die jeweils 8 Punkte geben. Trotzdem kann es natürlich Abweichungen – vor allem in der Schwierigkeit – geben, insbesondere, weil nicht allen Leuten alle Aufgaben gleich schwer fallen.

Die Aufgaben der Probeklausur decken nicht unbedingt alle Bereiche ab, die in den Klausuren vorkommen können. (Sonst wäre es für eine Klausur zu umfangreich geworden.) Klausurrelevant ist der gesamte Vorlesungsstoff bis Abschnitt 6.1 (inklusive).

Weitere Anmerkungen und Tipps zum Lösen von Aufgaben in den Klausuren:

- **Lesen Sie die Aufgaben sehr sorgfältig.** (Kleine Missverständnisse können leicht zu völlig anderen Lösungen führen, die keine Punkte mehr geben.)
- **Alle Antworten müssen begründet werden** (wenn nicht anders angegeben).
- Bei ja-nein-Fragen sollten Sie *sowohl* „ja“ oder „nein“ *als auch* eine Begründung schreiben. (Nur „ja“ oder „nein“ reicht nicht für die volle Punktzahl, und wenn Sie nur eine Begründung schreiben, aus der nicht klar hervor geht, ob Sie ja oder nein meinen, reicht das auch nicht.)
- Sie dürfen bei Begründungen und Beweisen alle Resultate aus der Vorlesung verwenden (wenn nicht anders angegeben).
- Manche Begründungen können sehr kurz sein. Bei Rechenaufgaben reicht üblicherweise die Rechnung selbst als Begründung (wenn sie nachvollziehbar ist).
- Um zu begründen, dass etwas *nicht* gilt, ist es am besten, ein (einziges) ganz konkretes Gegenbeispiel anzugeben.
- Wenn Sie die Probeklausur nutzen möchten, um zu testen, ob Sie gut genug für die eigentlich Klausur vorbereitet sind, empfehle ich, dass Sie versuchen, sie zu lösen, ohne sich die Lösungen vorher anzuschauen. (Wenn man die Lösungen gesehen hat, sehen die Aufgaben oft sehr viel einfacher aus, als sie sind.)

Aufgabe 1 (1+3+2+2 Punkte):

Sei $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ und $C = \{10, 11, 12, 13, 14\}$.

(a) Sei $h_0 \colon B \to C$ definiert durch $h_0(5) = 10$, $h_0(6) = 10$, $h_0(7) = 14$.
Geben Sie zwei verschiedene Abbildungen $g_1, g_2 \colon A \to B$ an, so dass $h_0 \circ g_1 = h_0 \circ g_2$ gilt.

(b) Geben Sie eine Abbildung $f \colon A \to C$ an, die sich nicht als Verknüfung $f = h \circ g$ schreiben lässt für $g \colon A \to B$ und $h \colon B \to C$.

(c) Zeigen Sie: Ist $f \colon A \to C$ eine nicht-injektive Abbildung, so lässt sie sich als Verknüfung $f = h \circ g$ schreiben für geeignete $g \colon A \to B$ und $h \colon B \to C$.

(d) Wir betrachten nun die Abbildung

$$\alpha\colon \operatorname{Abb}(A, B) \times \operatorname{Abb}(B, C) \to \operatorname{Abb}(A, C), (g, h) \mapsto h \circ g,$$

(i) Ist α injektiv?
(ii) Ist α surjektiv?

Aufgabe 2 (1+3+2+2 Punkte):

Wir fassen den Polynomring $\mathbb{R}[x]$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum auf. (Im Folgenden ist mit x immer die Variable des Polynomrings gemeint.) Sei $g \colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung, die ein Polynom $f \in \mathbb{R}[x]$ abbildet auf $\begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass g linear ist.

(b) Zeigen Sie, dass g surjektiv ist.
Hinweis: Sie können z. B. prüfen, dass $g(1)$, $g(x)$, $g(x^2)$ linear unabhängig sind und begründen, dass daraus die Surjektivität von g folgt.

(c) Geben Sie vier linear unabhängige Polynome in $\mathbb{R}[x]$ an und begründen Sie, dass aus der Existenz von solchen Polynomen folgt, dass g nicht injektiv ist.

(d) Geben Sie ein konkretes Polynom $f_0 \in \mathbb{R}[x]$ an, das nicht 0 ist, aber von g auf 0 abgebildet wird.

Aufgabe 3 (2+2+1+1+2 Punkte):

(a) Wir betrachten in $\mathbb{R}^3$ die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

Zeigen Sie, dass diese Vektoren ganz $\mathbb{R}^3$ erzeugen.

(b) Gibt es Teilmengen $A \subseteq \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, die eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden? Wenn ja, listen Sie alle solchen Teilmengen auf.

(c) Ist v_1, v_2 eine Basis eines Untervektorraums von $\mathbb{R}^3$?

(d) Ist v_2, v_3 eine Basis eines Untervektorraums von $\mathbb{R}^3$?

(e) Sei nun K ein beliebiger Körper. Wir nehmen an, dass $v_1', v_2', v_3', v_4' \in K^3$ so gewählt sind, dass gilt:
   (i) v_1', v_2', v_3' sind linear abhängig;
   (ii) v_1', v_2', v_4' sind linear abhängig;
   (iii) v_1', v_2' sind linear unabhängig.
   Zeigen Sie, dass dann v_1', v_2', v_3', v_4' *nicht* ganz K^3 erzeugen.
   Hinweis: Betrachten Sie den Untervektorraum $\langle v_1', v_2' \rangle_K$.

Aufgabe 4 (2+2+1+1+2 Punkte):

(a) Sei $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 0 & 0\\3 & 3 & 0\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Rang von A.

(b) Geben Sie einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ an mit $Av \neq 0$ und $A^2 v = 0$.
(Zur Erinnerung: Mit A^2 ist das Matrixprodukt $A \cdot A$ gemeint.)

(c) Sei nun $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine beliebige Matrix. Zeigen Sie: $\ker B \subseteq \ker B^2$.

(d) Wir nehmen nun an, dass ein Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ existiert mit $Bw \neq 0$ und $B^2 w = 0$. Zeigen Sie, dass dann $\operatorname{rk} B^2 < \operatorname{rk} B$ gilt.

(e) Zeigen Sie, dass für beliebige Matrizen $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gilt: Entweder $\operatorname{rk} B^2 = \operatorname{rk} B$ oder $\operatorname{rk} B^2 = \operatorname{rk} B - 1$.
Hinweis: Machen Sie eine Fallunterscheidung danach, was $\operatorname{rk} B$ ist.

Aufgabe 5 (2+2+2+2 Punkte):

(a) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ an, für die $v_1 := \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 5 und $v_2 := \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 10 ist.

(b) Wir nehmen nun an, dass $A' \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine beliebige Matrix mit den Eigenschaften aus (a) ist (also mit Eigenvektoren v_1 und v_2 zu den Eigenwerten 5 bzw. 10). Ist dann automatisch $v_1 + v_2$ auch ein Eigenvektor von A'?
   - Wenn ja, zu welchem Eigenwert?
   - Wenn nein: Gibt es überhaupt eine solche Matrix A', so dass $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor von A' ist?

(c) Gibt es eine reelle Zahl λ, so dass für jede Matrix A' wie in (b) und jedes Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ die Gleichung $\langle A'v_1, A'v_2 \rangle = \lambda \cdot \langle v_1, v_2 \rangle$ gilt? Wenn ja, was ist λ?

(d) Zeigen Sie: Ist $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix und sind $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ zwei Eigenvektoren von C zum gleichen Eigenwert mit $v_2 \neq -v_1$, so ist auch $v_1 + v_2$ ein Eigenvektor von C.