

Linear Algebra I
Probeklausur
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

- a) Seien $g_1: A \rightarrow B$ sodass $g_1(a) = 5$ gilt für alle $a \in A$ und $g_2: A \rightarrow B$ sodass $g_2(a) = 6$ gilt für alle $a \in A$. Dann ist $h_0 \circ g_i(a) = 10$ für alle $a \in A$, daraus folgt, dass $h_0 \circ g_1 = h_0 \circ g_2$ ist.
- b) Seien $h \in \text{Abb}(B, C)$ und $g \in \text{Abb}(A, B)$. Dann gilt $h \circ g(A) = h(g(A)) \subseteq h(B)$ und $\#h(B) \leq \#B = 3$ ist. Sei nun $f \in \text{Abb}(A, C)$ definiert durch $f(a) = a + 10$. Dann gilt $\#f(A) = 4$ und f kann nicht als $h \circ g$ geschrieben werden.
- c) Weil f nicht injektiv ist, existieren $a_1, a_2 \in A$ mit $a_1 \neq a_2$ aber $f(a_1) = f(a_2)$. Seien nun $a_3, a_4 \in A$ sodass $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Wir definieren $g \in \text{Abb}(A, B)$ mit $g(a_1) = g(a_2) = 5$, $g(a_3) = 6$ und $g(a_4) = 7$, und $h \in \text{Abb}(B, C)$ mit $h(5) = f(a_1)$, $h(6) = f(a_3)$ und $h(7) = f(a_4)$. Daraus folgt, dass $f = h \circ g$.
- d) i) α ist nicht injektiv, weil $\alpha(g_1, h_0) = \alpha(g_2, h_0)$ für h_0, g_1, g_2 wie in (a).
ii) α ist nicht surjektiv, weil die Abbildung f aus (b) nicht in $\text{im}(\alpha)$ liegt.

Aufgabe 2.

- a) Seien $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ und $r \in \mathbb{R}$. Wir wollen zeigen, dass $g(rP + Q) = rg(P) + g(Q)$.
Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir haben $(rP + Q)(a) = rP(a) + Q(a)$. Insbesondere gilt diese Gleichung für $a = 1$, $a = 2$ oder $a = 3$. Daraus folgt, dass g linear ist.
- b) Wir wollen zeigen, dass $g(1)$, $g(x)$ und $g(x^2)$ linear unabhängig sind.

Wir haben $g(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $g(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $g(x^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $ag(1) + bg(x) + cg(x^2) = 0$. Dann (a, b, c) ist eine Lösung der folgende LGS:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2b + 3c = 0 \\ a + 4b + 9c = 0 \end{cases}$$

Aus die erste Gleichung folgt $a = -b - c$. Dann die zweite Gleichung wird $b + 2c = 0$, oder $b = -2c$. Die dritte Gleichung wird nun $2c = 0$, da $c = 0$, $b = -2c = 0$ und $a = -b - c = 0$. D.h., alle Koeffizient in meine linear Kombination müssen null sein, und das bedeutet, dass $g(1)$, $g(x)$ und $g(x^2)$ linear unabhängig sind.

Alternativlösung: wir wollen zeigen, dass e_1 , e_2 und e_3 in $\text{im } g$ liegen.

Sei $P_1 = \frac{1}{2}(x-2)(x-3) \in \mathbb{R}[x]$. Dann ist $P_1(1) = 1$, $P_1(2) = 0$ und $P_1(3) = 0$, d.h., $g(P_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$. Analog definieren wir $P_2 = -(x-1)(x-3)$ und $P_3 = \frac{1}{2}(x-1)(x-2)$, und wir haben $g(P_2) = e_2$ und $g(P_3) = e_3$.

Weil g linear ist, muss im g ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ sein, also $\langle g(P_1), g(P_2), g(P_3) \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \text{im } g$, aber $\langle g(P_1), g(P_2), g(P_3) \rangle_{\mathbb{R}} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^3$, d.h., $\text{im } g = \mathbb{R}^3$ und g surjektiv ist.

- c) Die Polynomen $1, x, x^2$ und x^3 sind linear unabhängig in $\mathbb{R}[x]$. Weil $\dim \text{im } g = 3$, müssen die vier Vektoren $g(1), g(x), g(x^2)$ und $g(x^3)$ linear abhängig sein, d.h., es existieren $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, nicht alle null, sodass $\sum_{i=0}^3 a_i g(x^i) = 0$. Aber dann ist $g(\sum_{i=0}^3 a_i x^i) = 0$, d.h., $\sum_{i=0}^3 a_i x^i \in \ker g$ und g ist nicht injektiv.
- d) $f_0 = (x-1)(x-2)(x-3)$ ist so, dass $f_0(1) = 0$ ist, $f_0(2) = 0$ ist, und $f_0(3) = 0$ ist. D.h., $g(f_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.

- a) Wir wollen zeigen, dass e_1, e_2 und e_3 in $\langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle_{\mathbb{R}^3}$ liegen. Wir haben $e_1 = v_4$. Wir haben auch $v_1 + v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$, dann $\frac{1}{4}(v_1 + v_3) - v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und $v_3 - 3v_4 - (\frac{1}{4}(v_1 + v_3) - v_4) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2$. Zuletzt $\frac{1}{3}(v_1 - v_4 - 2e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_3$ und wir sind fertig.

Alternativlösungen existieren, z.B., wir können zeigen, dass v_1, v_3, v_4 linear unabhängig sind.

- b) Weil $2v_1 = v_2$, können wir entweder v_1 oder v_2 aus dieser Menge weglassen, und die anderen Vektoren erzeugen noch $\mathbb{R}^3$, d.h., $\{v_1, v_3, v_4\}$ und $\{v_2, v_3, v_4\}$ sind Basen von $\mathbb{R}^3$.

Andere Teilmengen von $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ können keine Basis von $\mathbb{R}^3$ sein, da eine Basis aus drei Vektoren bestehen muss aber von den Vektoren v_1 und v_2 nur einer dabei sein kann.

- c) Nein, weil v_1 und v_2 linear abhängig sind.
- d) Ja, weil v_2 und v_3 linear unabhängig sind.
- e) Weil v'_1, v'_2, v'_3 linear abhängig sind, existieren $a_1, a_2, a_3 \in K$, nicht alle null, mit $a_1 v'_1 + a_2 v'_2 + a_3 v'_3 = 0$. Wenn $a_3 = 0$ ist, dann gibt es eine nicht-triviale lineare Abhängigkeit zwischen v'_1 und v'_2 , und das kann nicht sein aus Annahme (iii). Also $a_3 \neq 0$ und $v'_3 = (a_3^{-1} a_1) v_1 + (a_3^{-1} a_2) v_2$, d.h., $v'_3 \in \langle v'_1, v'_2 \rangle_{\mathbb{R}}$.

Analog haben wir $v'_4 \in \langle v'_1, v'_2 \rangle_{\mathbb{R}}$. Also hat $\langle v'_1, v'_2, v'_3, v'_4 \rangle_{\mathbb{R}} = \langle v'_1, v'_2 \rangle_{\mathbb{R}}$ Dimension 2 und kann nicht gleich ganz K^3 sein.

Aufgabe 4.

- a) Die zwei erste Spalten von A sind linear unabhängig aber die dritte ist null. Demnach ist $\text{rk}(A) = 2$.

b) Wir haben $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x + 3y \end{pmatrix}$ und $A \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x + 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 9x \end{pmatrix}$. Z.B., $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker(A^2)$ aber $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \ker(A)$.

- c) Sei $v \in \ker(B)$. Per Definition gilt $Bv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Aber dann gilt auch $B^2v =$

$$B(Bv) = B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ d.h., } v \in \ker(B^2).$$

- d) In diesem Fall gilt $\ker(B) \subsetneq \ker(B^2)$, und daraus folgt $\dim(\ker(B)) < \dim(\ker(B^2))$. Weil $\text{rk}(B) = 3 - \dim(\ker(B))$ ist und $\text{rk}(B^2) = 3 - \dim(\ker(B^2))$, haben wir $\text{rk}(B) = 3 - \dim(\ker(B)) > 3 - \dim(\ker(B^2)) = \text{rk}(B^2)$.

- e) Aus (c) folgt dass $\text{rk}(B) \geq \text{rk}(B^2)$. Wenn $\text{rk}(B) = 0$ ist, muss B die Nullmatrix sein, und damit auch B^2 , d.h., $\text{rk}(B^2) = 0 = \text{rk}(B)$. Wenn $\text{rk}(B) = 1$ ist, muss $\text{rk}(B^2) \leq \text{rk}(B)$ sein, und es gibt nur zwei Möglichkeiten: entweder $\text{rk}(B^2) = 1 = \text{rk}(B)$ oder $\text{rk}(B^2) = 0 = \text{rk}(B) - 1$. Wenn $\text{rk}(B) = 3$ ist, ist B invertierbar, dann ist auch B^2 invertierbar, und $\text{rk}(B^2) = 3 = \text{rk}(B)$.

Es bleibt der Fall $\text{rk}(B) = 2$. Dann müssen wir zeigen, dass $\text{rk}(B^2) \neq 0$ ist. Weil $\text{rk}(B) = \dim(\text{im}(B)) = 2$, können wir zwei Vektoren $w_1, w_2 \in \text{im}(B)$ linear unabhängig finden. Dann existieren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ mit $Bv_i = w_i$. Weil $\dim(\ker(B)) = 1$, können zwei linear unabhängige Vektoren nicht beide in $\ker(B)$ liegen, insbesondere, entweder $w_1 \notin \ker(B)$ oder $w_2 \notin \ker(B)$. Aber dann ist entweder $Bw_1 = B^2v_1 \neq 0$ oder $Bw_2 = B^2v_2 \neq 0$ und B^2 kann nicht null sein, d.h., $\text{rk}(B^2) \neq 0$.

Alternativlösung für der Fall $\text{rk}(B) = 2$: Wir wenden Sylversters Rangungleichung an auf die Abbildung $B: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, verknüpft mit sich selbst: Dies liefert $\text{rk}(B) + \text{rk}(B) - 3 \leq \text{rk}(B^2)$, also $\text{rk}(B^2) \geq 2 + 2 - 3 \geq 1$.

Aufgabe 5.

a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$

- b) Nein: für eine beliebige solche Matrix A' gilt $A'(v_1 + v_2) = A'v_1 + A'v_2 = 5v_1 + 10v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 15 \\ 10 \end{pmatrix}$, aber für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\lambda(v_1 + v_2) = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$. Weil $10 \neq 5$, ist $v_1 + v_2$ kein Eigenvektor von A' .

- c) Für alle solche Matrizen A' und alle Skalarprodukte, gilt $\langle A'v_1, A'v_2 \rangle = \langle 5v_1, 10v_2 \rangle = 50\langle v_1, v_2 \rangle$.

- d) Wir haben $Cv_1 = \lambda v_1$ und $Cv_2 = \lambda v_2$, für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $C(v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$, und $v_1 + v_2 \neq 0$ da $v_1 \neq -v_2$; d.h., $v_1 + v_2$ ist ein Eigenvektor von C mit Eigenwert λ .