Kurzskript Lineare Algebra I

Immi Halupczok

29. Januar 2025

Inhaltsverzeichnis

Lineare Algebra I

Mi 9.10.

1 Mathematische Grundbegriffe

1.1 Lineare Gleichungssysteme

In diesem Abschnitt werden wir sehen, wie man sämtliche Lösungen eines linearen Gleichungssystems bestimmen kann. Wir arbeiten dabei etwas informell mit reellen Zahlen, wie Sie sie aus der Schule kennen. Wir werden das später als Motivation verwenden, um präzise zu verstehen, was wir überhaupt „Zahl“ nennen wollen.

Definition 1.1.1 (unpräzise) (a) *Die **natürlichen Zahlen** sind* $0, 1, 2, 3, \ldots$.[1] *Die Menge aller natürlichen Zahlen wird mit* $\mathbb{N}$ *bezeichnet, d. h. statt „x ist eine natürliche Zahl“ schreiben wir auch „$x \in \mathbb{N}$“.*

(b) *Die **ganzen Zahlen** sind* $\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$. *Die Menge der ganzen Zahlen wird mit* $\mathbb{Z}$ *bezeichnet.*

(c) *Eine rationale Zahl ist eine Zahl, die sich als Bruch* $\frac{a}{b}$ *schreiben lässt, wobei* a *eine beliebige ganze Zahl ist und* b *eine ganze Zahl ungleich* 0. *Die Menge der rationalen Zahlen wird mit* $\mathbb{Q}$ *bezeichnet.*

(d) *(Reelle Zahlen werden in der Analysis-Vorlesung definiert.) Die Menge der reellen Zahlen wird mit* $\mathbb{R}$ *bezeichnet.*

Konvention 1.1.2 *Eine **Variable** ist ein Symbol, das für ein mathematisches Objekt (ihr **Wert**) stehen kann. Als Symbol werden meist Buchstaben verwendet, z. T. mit „Dekorationen“ (z. B.* a', $\tilde{a}$, $\hat{a}$, $\underline{a}$, $\ldots$*). Kommt das gleiche Symbol mit verschiedenen Dekorationen vor, so sind dies verschiedene Variablen. Ist der Wert einer Variablen festgelegt, so nennt man sie oft auch eine **Konstante**.*

Konvention 1.1.3 *Symbole können außerdem ein oder mehrere mathematische Objekte als Indizes erhalten (z. B.* $a_1, a_2, a_{7,8}$*). Das gleiche Symbol mit verschiedenen Indizes sind verschiedene Variablen.*

Definition 1.1.4 *Sei* $n \geq 1$ *eine natürliche Zahl und seien* $a_1, \ldots, a_n$ *und* b *reelle Zahlen. Einen Ausdruck der Form*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$$

(wobei $x_1, \ldots, x_n$ *Variablen sind), nennt man eine **lineare Gleichung** (in* $x_1, \ldots, x_n$*).*

Mo 14.10.

Definition 1.1.5 (a) *Sind* a_1 *und* a_2 *beliebige mathematische Objekte, so schreibt man* (a_1, a_2) *für das (**geordnete**) **Paar** bestehend aus* a_1 *und* a_2. *Man nennt*

[1] Es besteht unter Mathematikern keine Einigkeit darüber, ob 0 als natürliche Zahl bezeichnet wird oder nicht. In dieser Vorlesung ist 0 eine natürliche Zahl.

a_1 *und* a_2 *die* ***Einträge*** *(oder* ***Komponenten****) des Tupels* (a_1, a_2)*. Zwei Paare* (a_1, a_2) *und* (b_1, b_2) *werden als gleich angesehen (als Formel: „*$(a_1, a_2) = (b_1, b_2)$*“), wenn die entsprechenden Einträge gleich sind, also wenn sowohl* $a_1 = b_1$ *als auch* $a_2 = b_2$ *ist.*

(b) *Analog definiert man* ***Tripel*** (a_1, a_2, a_3)*,* ***Quadrupel*** (a_1, a_2, a_3, a_4)*, etc., und allgemeiner* n***-Tupel*** $(a_1, \ldots, a_n)$ *für beliebige* $n \geq 1$*.*

(c) *Die Menge der* n*-Tupel, deren Einträge alle aus einer gegebenen Menge* M *stammen, wird mit* M^n *bezeichnet.*

Definition 1.1.6 *Eine* ***Lösung*** *einer linearen Gleichung*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

ist ein n*-Tupel* $(c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$*, so dass*

$$a_1c_1 + \cdots + a_nc_n = b$$

gilt.

Lemma 1.1.7 (a) *Sei* $L :=$ „$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$“ *eine lineare Gleichung, sei* $r \in \mathbb{R}$*, und sei* $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$ *eine Lösung von* L*. Dann ist* $\underline{c}$ *auch eine Lösung des* r*-fachen von der Gleichung* L*, also der linearen Gleichung*

$$(ra_1)x_1 + \cdots + (ra_n)x_n = rb$$

(b) *Wir nehmen nun außerdem an, dass* $L' :=$ „$a_1'x_1 + \cdots + a_n'x_n = b'$“ *eine weitere lineare Gleichung ist und dass* $\underline{c}$ *auch eine Lösung von* L' *ist. Dann ist* $\underline{c}$ *auch eine Lösung der Summe von* L *und* L'*, also der linearen Gleichung*

$$\text{„}(a_1 + a_1')x_1 + \cdots + (a_n + a_n')x_n = (b + b')\text{“}.$$

Definition 1.1.8 *Seien* $m \geq 1$ *und* $n \geq 1$ *natürliche Zahlen. Ein* ***lineares Gleichungssystem*** *in einem Variablentupel* $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *ist ein Tupel* $\underline{L} = (L_1, \ldots, L_m)$*, wobei jedes* L_i *eine lineare Gleichung in* $\underline{x}$ *ist. Eine Lösung von* $\underline{L}$ *ist ein Tupel* $\underline{c} \in \mathbb{R}^n$*, das Lösung von jeder der Gleichungen* $L_1, \ldots, L_m$ *ist.*

Definition 1.1.9 *Seien* $m, n \geq 1$ *natürliche Zahlen.*

(a) *Eine* $m \times n$***-Matrix*** *(über* $\mathbb{R}$*) ist ein* $m \cdot n$*-Tupel* A *von reellen Zahlen, die in einem Rechteck mit* m *Zeilen und* n *Spalten geschrieben werden. Die Einträge einer Matrix werden üblicherweise mit Paaren* (i, j) *für* $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ *indiziert, wobei* i *die Zeile und* j *die Spalte angibt; also:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

(b) *Die* ***(erweiterte) Koeffizientenmatrix*** *eines linearen Gleichungssystems*

$$\underline{L} := \left(\begin{array}{cccc} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right) \tag{1}$$

ist die $m \times (n+1)$*-Matrix*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right). \tag{2}$$

(Der senkrechte Strich hat formal keine Bedeutung. Er dient nur dazu, optisch sichtbar zu machen, das die Zahlen rechts davon die rechten Seiten der Gleichungen sind.)

Definition 1.1.10 *Sei*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

eine Matrix. Die folgenden Umformungen von A *nennt man* ***elementare Zeilentransformationen*** *von* A*:*

(TAU) Tausche zwei Zeilen.

(MUL) Wähle eine reelle Zahl $r \neq 0$ *und eine Zeile* i*; multipliziere alle Einträge der gewählten Zeile mit* r*. Die* i*-te Zeile von* A *wird also ersetzt durch*

$$\begin{pmatrix} ra_{i,1} & ra_{i,2} & \ldots & ra_{i,n} \end{pmatrix}.$$

(ADD) Wähle eine reelle Zahl r *und zwei verschiedene Zeilen* i *und* j*; addiere zu jedem Eintrag der* i*-ten Zeile das* r*-fache des entsprechenden Eintrags der* j*-ten Zeile. Die* i*-te Zeile von* A *wird also ersetzt durch*

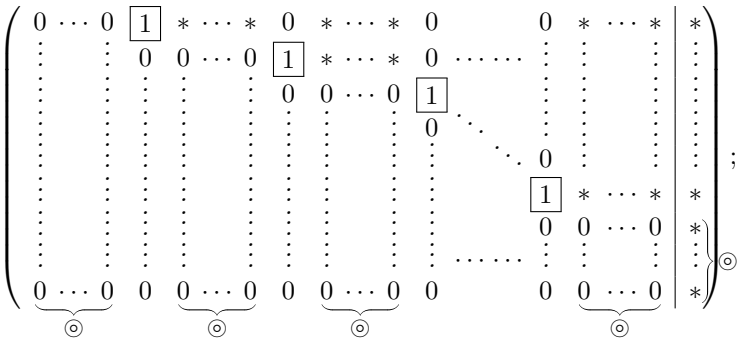
$$\begin{pmatrix} a_{i,1} + ra_{j,1} & a_{i,2} + ra_{j,2} & \ldots & a_{i,n} + ra_{j,n} \end{pmatrix}.$$

Lemma 1.1.11 *Sei* A *eine beliebige Matrix und sei* A' *eine Matrix, die man aus* A *durch eine elementare Zeilentransformation erhält. Dann gibt es auch eine elementare Zeilentransformation, die aus* A' *wieder* A *macht.*

Mi 16.10.

Satz 1.1.12 *Seien $\underline{L}$ und $\underline{L}'$ zwei lineare Gleichungssysteme, und seien A und A' ihre Koeffizientenmatrizen. Wir nehmen an, dass man A' aus A durch eine elementare Zeilentransformation erhalten kann. Dann haben $\underline{L}$ und $\underline{L}'$ die selben Lösungen.*

Definition 1.1.13 *Man sagt, eine (Koeffizienten-)Matrix ist in* ***Normalform****, wenn sie die folgende Form hat:*



Hierbei steht jedes „$*$“ für eine beliege reelle Zahl, und die mit ◎ markierten Zeilen und Spalten müssen nicht vorhanden sein. Die eingekästelten 1*en (d. h. die ersten nicht-0-Einträge jeder Zeile) nennt man* ***Pivot-Einträge*** *(oder auch* ***Pivot-Elemente****).*

Satz 1.1.14 (Gauß-Elimination) *Jede Matrix kann durch endlich viele elementare Transformationen in Normalform gebracht werden.*

Bemerkung 1.1.15 *Die Lösungen eines beliebigen linearen Gleichungssystems $\underline{L}$ lassen sich wie folgt bestimmen: Bringe zunächst die Koeffizientenmatrix von $\underline{L}$ in Normalform. (Dadurch ändern sich nach Satz 1.1.12 die Lösungen nicht.) Danach lassen sich folgendermaßen alle Lösungen von $\underline{L}$ ablesen:*

(a) *Existiert in der Koeffizientenmatrix eine Zeile der Form $(0 \cdots 0 \mid b_i)$ mit $b_i \neq 0$, so besitzt $\underline{L}$ keine Lösung.*

(b) *Existiert keine solche Zeile, so besitzt $\underline{L}$ Lösungen. In diesem Fall lassen sich sämtliche Lösungen folgendermaßen erhalten:*

  (i) *Für jedes $j \leq n$: Enthält die j-te Spalte keinen Pivot-Eintrag, so kann x_j beliebig gewählt werden.*

  (ii) *Danach sind die restlichen Variablen eindeutig festgelegt: Enthält die j-te Spalte ein Pivot-Element in der i-ten Zeile, so hat die i-te Gleichung die Form*

$$x_j + a_{i,j+1}x_{j+1} + \cdots + a_{i,n}x_n = b_i,$$

  wobei nur diejenigen Koeffizienten $a_{i,k}$ ungleich null sein können, deren Spalte kein Pivot-Eintrag enhält. Insbesondere haben wir die entsprechenden x_k bereits in Schritt (i) gewählt. Diese Gleichung legt also x_j eindeutig fest, nämlich: $x_j = b_i - a_{i,j+1}x_{j+1} - a_{i,j+2}x_{j+2} - \cdots - a_{i,n}x_n$.

Korollar 1.1.16 *Ist $\underline{L}$ ein lineares Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen, so hat $\underline{L}$ entweder gar keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.*[2]

1.2 Notationen, Mengen und Tupel

In diesem Abschnitt führen wir viele grundlegende Notationen und Konventionen aus der Mathematik ein, die im gesamten Studium verwendet werden. Insbesondere werden wir einige (weitere) Notationen zu Mengen und Tupeln sehen.

Manchmal möchte man mathematische Aussagen kompakt mit Symbolen aufschreiben, statt als ausgeschriebene (deutsche) Sätze. Dafür gibt es einige Notationen.[3]

Notation 1.2.1 *Im folgenden sind A und B zwei mathematische Aussagen.*

(a) *„$A \wedge B$“ bedeutet: Sowohl Aussage A als auch Aussage B ist wahr.*
(b) *„$A \vee B$“ bedeutet: Mindestens eine der Aussagen A und B ist wahr.*
(c) *„$\neg A$“ bedeutet: Die Aussage A ist nicht wahr.*
(d) *„$A \Rightarrow B$“ bedeutet: Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr.*
*Man schreibt auch „$B \Leftarrow A$“ und sagt auch „A **impliziert** B“ oder „B **folgt aus** A“.*
(e) *„$A \Leftrightarrow B$“ bedeutet: Wenn A wahr ist, dann auch B, und wenn B wahr ist, dann auch A.*
*Man sagt auch „A ist **äquivalent** zu B“ oder „A und B sind äquivalent“ oder „A gilt genau dann, wenn B gilt“.*

Notation 1.2.2 *Im folgenden ist A eine mathematische Aussage, in der eine Variable x vorkommt.*

(a) *„$\forall x \in M \colon A$“ bedeutet: Man kann in der Aussage A für x jedes beliebige Element von M einsetzen und erhält immer eine wahre Aussage.*
Man sagt auch: „A gilt für alle x aus M“. Manchmal schreibt man auch „$A \quad \forall x \in M$“.
(b) *„$\exists x \in M \colon A$“ bedeutet: Es gibt (mindestens) ein Element aus M, das man für x einsetzen kann, so dass A wahr wird.*
Man sagt auch: „Es existiert ein x aus M, so dass A wahr ist.“ (Mit „existiert ein“ ist immer „existiert mindestens ein“ gemeint.)
(c) *„$\exists^{=1} x \in M \colon A$“ bedeutet: Es existiert genau ein Element x von M, für das A wahr ist. (Für alle anderen x aus M ist A falsch.)*
Manche Leute schreiben auch „$\exists! x \in M \colon A$“

[2] Achtung: Wir werden später lineare Gleichungen auch in einem allgemeineren Kontext sehen. In der Verallgemeinerung muss dieses Korollar etwas abgewandelt werden; siehe Bemerkung 2.1.12.

[3] Das ist insbesondere nützlich für Tafelanschriebe und eigene Notizen. In ausformulierten Beweisen, die jemand anderes lesen und verstehen können soll, ist es jedoch oft besser, Dinge als Text auszuformulieren.

Statt „$\forall x \in M\colon A$“ schreibt man auch „$\forall x\colon A$“, wenn, man M aus dem Kontext erraten kann; und analog bei (b), (c).

Statt „$\forall x \in M\colon \forall y \in M\colon A$“ schreibt man auch „$\forall x, y \in M\colon A$“, etc.; und analog bei (b).

Bemerkung 1.2.3 *Die Symbole $\forall$ und $\exists$ nennt man **Quantoren**. („$\forall$“ ist der **All-Quantor**, „$\exists$“ ist der **Existenz-Quantor**.)*

Definition 1.2.4 (unpräzise) (a) *Eine **Menge** M ist ein mathematisches Objekt, das dadurch charakterisiert ist, welche mathematischen Objekte ihre **Elemente** sind. Statt „x ist ein Element von M“ sagt man auch: „x liegt in M“ oder „x ist aus M“ oder „M enthält x“. Notation dafür: „$x \in M$“*
Zwei Mengen M_1 und M_2 sind also gleich (als Formel: „$M_1 = M_2$“) genau dann, wenn für jedes mathematische Objekt x gilt: $x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2$.

(b) *Weitere Notationen:*
„$x \notin M$“ bedeutet: x ist kein Element von M.
„$x, y \in M$“ bedeutet: sowohl x als auch y sind Elemente von M; etc.

(c) *Die **leere Menge** ist die Menge, die gar keine Elemente hat. Sie wird mit $\emptyset$ bezeichnet.*

Konvention 1.2.5 *Ist A eine Aussage und $M = \emptyset$, so wird „$\forall x \in M\colon A$“ als wahr angesehen.*

Definition 1.2.6 *Sind $x_1, \ldots, x_n$ beliebige mathematische Objekte, so schreiben wir*

$$\{x_1, \ldots, x_n\}$$

für die Menge, deren Elemente genau $x_1, \ldots, x_n$ sind, also:

$$y \in \{x_1, \ldots, x_n\} \iff (y = x_1 \vee \cdots \vee y = x_n).$$

Konvention 1.2.7 (a) *Eine ein-elementige Menge $\{a\}$ wird* nicht *als das gleiche angesehen wie das Element a selbst.*

(b) *Ist ein Element A von M selbst wieder eine Menge, so werden die Elemente von A* nicht *automatisch auch als Elemente von M angesehen.*

Mi 23.10.

Definition 1.2.8 *Ist M eine Menge, so schreiben wir $\#M$ für die Anzahl der Elemente von M; man nennt dies auch die **Kardinalität** (oder **Mächtigkeit**) von M. (Statt $\#M$ kann man auch $|M|$ schreiben.) Genauer: Lässt sich $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ schreiben für paarweise veschiedene x_i, so nennen wir M **endlich** und setzen $\#M := n$. Lässt sich M nicht so schreiben, so nennen wir M **unendlich**.*

Notation 1.2.9 *Ist M eine Menge und A eine Aussage, die eine Variable x enthält, so schreiben wir $\{x \in M \mid A\}$ für die Menge derjenigen Elemente x von M, für die die Aussage A wahr ist. (Manche Leute scheiben auch „$\{x \in M : A\}$“ oder „$\{x \in M ; A\}$“.) Wenn man M aus dem Kontext erraten kann, schreibt man oft auch nur $\{x \mid A\}$. Ist A' eine weitere Aussage, so schreibt man statt $\{x \mid A \wedge A'\}$ oft auch $\{x \mid A, A'\}$.*

Definition 1.2.10 *Seien M_1 und M_2 Mengen.*

(a) *M_1 heißt **Teilmenge** von M_2, wenn jedes Element von M_1 auch ein Element von M_2 ist. Man sagt auch: „M_1 ist eine **Untermenge** von M_2“; oder: „M_2 ist eine **Obermenge** von M_1“. Notationen: $M_1 \subseteq M_2$; $M_2 \supseteq M_1$.*

(b) *Die Notation $M_1 \subsetneq M_2$ bedeutet: $M_1 \subseteq M_2$ aber $M_1 \neq M_2$; man sagt: „M_1 ist eine **echte Teilmenge** von M_2.“*

Bemerkung: In Analogie zu „$<$“ und „$\leq$“ wäre es naheliegend, dass man statt „$\subsetneq$“ auch „$\subset$“ schreiben kann. Allerdings wird $\subseteq$ deutlich häufiger benötigt als $\subsetneq$; deshalb ist es üblicher, dass „$\subset$“ für „$\subseteq$“ steht.

Definition 1.2.11 *Seien M_1 und M_2 Mengen.*

(a) *Die **Vereinigung** von M_1 und M_2 ist $M_1 \cup M_2 := \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2\}$ (Man sagt auch „M_1 **vereinigt** M_2“).*

(b) *Der **Schnitt** von M_1 und M_2 ist $M_1 \cap M_2 := \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2\}$ (Man sagt auch „M_1 **geschnitten** M_2“). Ist $M_1 \cap M_2 = \emptyset$, so sagt man, die Mengen M_1 und M_2 sind **disjunkt**.*

(c) *Die **Differenz** von M_1 und M_2 ist $M_1 \setminus M_2 := \{x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}$ (Man sagt auch „M_1 **ohne** M_2“).*

Notation 1.2.12 *Sei I eine Indexmenge und sei M_i eine Menge für jedes $i \in I$. (Mit **Indexmenge** ist eine normale Menge gemeint, deren Elemente als Indizes verwendet werden.)*

(a) $\bigcup_{i \in I} M_i$ *ist die Menge derjenigen Elemente, die in mindestens einer der Mengen M_i liegen, also formal:*

$$x \in \bigcup_{i \in I} M_i \iff \exists i \in I \colon x \in M_i$$

Im Fall $I = \emptyset$ setzt man $\bigcup_{i \in I} M_i := \emptyset$.

(b) $\bigcap_{i \in I} M_i$ *ist die Menge derjenigen Elemente, die in jeder der Mengen M_i liegen, also formal:*

$$x \in \bigcap_{i \in I} M_i \iff \forall i \in I \colon x \in M_i$$

Im Fall $I = \emptyset$ *ist* $\bigcap_{i \in I} M_i$ *nicht definiert.*

Notation 1.2.13 *Ist* $I = \{m, m+1, \ldots, n\}$ *für ganze Zahlen* $m \leq n$*, so schreibt man statt*

$$\bigcup_{i \in I} M_i \quad \text{und} \quad \bigcap_{i \in I} M_i$$

auch

$$\bigcup_{i=m}^{n} M_i \quad \text{und} \quad \bigcap_{i=m}^{n} M_i.$$

Definition 1.2.14 *Ist* M *eine Menge, so bezeichnet*

$$\mathcal{P}(M) := \{A \mid A \subseteq M\}$$

die Menge aller Teilmengen von M*;* $\mathcal{P}(M)$ *wird* ***Potenzmenge*** *von* M *genannt.*

Definition 1.2.15 *Sind* M_1 *und* M_2 *Mengen, so schreibt man* $M_1 \times M_2$ *für die Menge der Paare* (x_1, x_2) *bestehend aus einem Element* x_1 *von* M_1 *und einem Element von* x_2 *von* M_2*. Man nennt* $M_1 \times M_2$ *das* ***kartesische Produkt*** *von* M_1 *und* M_2*. Analog schreibt man* $M_1 \times M_2 \times M_3$ *für die Menge der Tripel, etc.*

Bemerkung 1.2.16 *Laut Definition 1.1.5 ist also* M^n *eine Kurzschreibweise für* $\underbrace{M \times \cdots \times M}_{n \text{ mal}}$.

Notation 1.2.17 *Für ein Tupel* $(a_1, \ldots, a_n)$ *verwendet man als Kurzschreibweise auch* $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$*. Ist aus dem Kontext klar, dass* i *von* 1 *bis* n *laufen soll, so schreibt man auch noch kürzer* $(a_i)_i$*.*

Konvention 1.2.18

(a) *Man unterscheidet nicht zwischen einem* 1*-Tupel* (a) *und dem Element* a *selbst. Anders ausgedrückt:* $M^1 = M$*.*

(b) *Wenn manche Einträge eines Tupels selbst wieder Tupel sind, fasst man das oft als ein langes Tupel auf, also z. B.* $(a, (b, c)) = (a, b, c)$*. Anders ausgedrückt: Man indentifiziert oft verschiedene Klammerungen von kartesischen Produkten, also z. B.:* $A \times (B \times C) = A \times B \times C$*.*

(c) *Manchmal ist es praktisch, auch* 0*-Tupel zu betrachten. Es gibt nur ein einziges* 0*-Tupel; es ist das einzige Element von* M^0 *(egal, was* M *ist).*

1.3 Abbildungen

Ein weiteres grundlegendes Objekt in der Mathematik sind Abbildungen. Wir führen in diesem Abschnitt diesbezügliche Definitionen, Notationen und Konventionen ein.

Definition 1.3.1 *Seien A und B Mengen. Eine **Abbildung** (oder **Funktion**) von A nach B ist ein mathematisches Objekt f, das jedem Element $a \in A$ ein Element $f(a) \in B$ zuordnet. Ist $f(a) = b$, so sagt man, f **bildet** a auf b **ab**.*

Formal ist eine Abbildung f gegeben durch drei Mengen A, B und $G \subseteq A \times B$, mit der Eigenschaft, dass für jedes $a \in A$ genau ein $b \in B$ existiert mit $(a, b) \in G$. Für jedes $a \in A$ bezeichnet $f(a)$ dann das (eindeutige) Element von B, so dass $(a, f(a)) \in G$ ist.

*Man nennt A den **Definitionsbereich** von f, B den **Wertebereich** von f und G den **Graph** von f.*

Mo 28.10.

Bemerkung 1.3.2 *Ist f eine Abbildung von A nach B und ist $B' \subseteq B$ eine Teilmenge, so dass $f(a) \in B'$ gilt für jedes $a \in A$, so fassen wir f manchmal auch als Abbildung von A nach B' auf, auch wenn es sich formal gesehen um eine andere Abbildung handelt.*[4]

Definition 1.3.3 *Sind A und B Mengen, so bezeichnet $\mathrm{Abb}(A, B)$ die Menge aller Abbildungen von A nach B.*

Notation 1.3.4 *Statt „$f \in \mathrm{Abb}(A, B)$“ schreibt man auch „$f\colon A \to B$“ oder „$A \xrightarrow{f} B$“. Statt „$f(a) = b$“ schreibt man auch „$f\colon a \mapsto b$“. Ist T ein mathematischer Ausdruck, in dem a als Variable vorkommt, so bedeutet*

$$f\colon A \to B, a \mapsto T,$$

dass $f \in \mathrm{Abb}(A, B)$ die Abbildung ist, die jedes $a \in A$ auf den entsprechenden Wert von T abbildet.

Konvention 1.3.5 *Ist $f\colon A_1 \times A_2 \to B$, so schreibt man statt $f((a_1, a_2))$ auch $f(a_1, a_2)$ (für $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$). Und analog für $f\colon A_1 \times A_2 \times A_3 \to B$, etc.*

Definition 1.3.6 *Die **Identität** auf einer Menge A ist die Abbildung $\mathrm{id}_A\colon A \to A, a \mapsto a$.*

Definition 1.3.7 *Seien A, B, C Mengen und seien $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$ Abbildungen. Dann ist die **Verkettung** (man sagt auch „**Verknüpfung**“) von f und g die Abbildung*

$$g \circ f\colon A \to C, a \mapsto g(f(a)).$$

*„$g \circ f$“ spricht man oft „g **nach** f“ aus.*

[4] Manchmal wird gar nicht zwischen diesen $f\colon A \to B$ und $f\colon A \to B'$ unterschieden; das würde in dieser Vorlesung allerdings manchmal zu Verwirrung führen.

Definition 1.3.8 *Ist $f\colon A \to A$ eine Abbildung von A in sich selbst und ist $k \in \mathbb{N}$, so setzen wir $f^k := \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k \text{ mal}}$ falls $k \geq 1$, und $f^0 := \mathrm{id}_A$.*

Notation 1.3.9 *Ist A eine Aussage, in der eine Variable x vorkommt und $f\colon B \to C$ eine Abbildung, so schreibt man $\{f(x) \mid A\}$ für die Menge all der Elemente von C, die man erhält, wenn man f auf alle Elemente $x \in B$ anwendet, für die die Aussage A wahr ist; also formal:*

$$\{f(x) \mid A\} = \{c \in C \mid \exists x \in B\colon A\}.$$

Definition 1.3.10 *Seien A und B Mengen, und sei $f\colon A \to B$.*

(a) *Ist $A' \subseteq A$, so ist $f(A') := \{f(a) \mid a \in A'\}$ das **Bild von A' unter f**.*
(b) *Das Bild unter f des gesamten Definitionsbereichs A wird auch einfach nur **Bild** von f genannt. Notation dafür: $\operatorname{im} f := f(A)$.*
(c) *Ist $B' \subseteq B$, so ist $f^{-1}(B') := \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$ das **Urbild von B' unter f**.*
(d) *Ist $b \in B$, so schreibt man oft auch $f^{-1}(b)$ statt $f^{-1}(\{b\})$. Besteht die Menge $f^{-1}(b)$ aus genau einem Element a, so meint man mit $f^{-1}(b)$ oft auch nur dieses Element a (und nicht die Menge $\{a\}$).*

Definition 1.3.11 *Seien A und B Mengen, und sei $f\colon A \to B$.*

(a) *f heißt **injektiv**, wenn für alle $b \in B$ gilt: $\#(f^{-1}(b)) \leq 1$.*
*Man sagt auch „f ist eine **Injektion** von A nach B“ und schreibt dafür „$f\colon A \hookrightarrow B$“.*
(b) *f heißt **surjektiv**, wenn für alle $b \in B$ gilt: $\#(f^{-1}(b)) \geq 1$.*
*Man sagt auch „f ist eine **Surjektion** von A nach B“ und schreibt dafür „$f\colon A \twoheadrightarrow B$“.*
(c) *f heißt **bijektiv**, wenn für alle $b \in B$ gilt: $\#(f^{-1}(b)) = 1$.*
*Man sagt auch „f ist eine **Bijektion** zwischen A und B“ und schreibt dafür „$f\colon A \xrightarrow{1:1} B$“.*

Satz 1.3.12 *Seien A und B Mengen und sei $f\colon A \to B$ eine Abbildung.*

(a) *Die Abbildung f ist bijektiv genau dann, wenn eine Abbildung $g\colon B \to A$ existiert, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_B$ und $g \circ f = \mathrm{id}_A$ gilt.*
(b) *Ist dies der Fall, so ist die Abbildung g aus (a) eindeutig durch f festgelegt.*

Mi 30.10.

Definition 1.3.13 *Ist $f\colon A \to B$ bijektiv, so nennt man die Abbildung g aus Satz 1.3.12 das **Inverse** von f (oder auch auch „**Umkehrabbildung** von f“). Die Notation für diese Abbildung ist f^{-1}. Im Fall $B = A$ setzt man auch $f^{-k} := (f^{-1})^k$ für $k \in \mathbb{N}$.*

Bemerkung 1.3.14 *Bei bijektiven Abbildungen $f\colon A \to B$ passt die Notation f^{-1} für die Umkehrabbildung mit der Notation für Urbilder (Definition 1.3.10) zusammen: Für $B' \subseteq B$ ist das Urbild von B' unter f das selbe wie das Bild von B' unter der Umkehrabbildung f^{-1}, und für $b \in B$ ist das Urbild von b unter f genau das Bild von b unter f^{-1}.*

Definition 1.3.15 *Ist $f\colon A \to B$ eine Abbildung und $A' \subseteq A$ eine Teilmenge, so schreiben wir $f|_{A'}$ für die **Einschränkung** von f auf A', d. h. $f|_{A'}\colon A' \to B, a \mapsto f(a)$.*

Satz 1.3.16 *Seien A und B endliche Mengen gleicher Kardinalität. Dann gilt für Abbildungen $f \in \mathrm{Abb}(A, B)$: Ist f injektiv oder surjektiv, so ist f bereits bijektiv.*

1.4 Partitionen und Äquivalenzrelationen

Manchmal möchte man eine Menge M in Teile zerlegen. Dies nennt man eine Partition von M. Anstatt direkt anzugeben, was die Teile sind, ist es manchmal praktischer zu beschreiben, wann Elemente im gleichen Teil liegen sollen (und wann nicht). Dies führt zum Begriff einer Äquivalenzrelation auf M. Wir werden auch ein wichtiges Beispiel einer Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ sehen.

Definition 1.4.1 *Eine **Partition** einer Menge M ist eine Menge P von nichtleeren Teilmengen von M (die man die **Teile** von P nennt), so dass jedes $a \in M$ in genau einem Teil $T \in P$ liegt.*

Definition 1.4.2 *Sei M eine Menge. Eine **Relation** auf M ist gegeben durch eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$. Meistens werden Relationen mit einem Symbol bezeichnet (z. B. „$<$“), das man zwischen zwei Elemente $a, b \in M$ schreibt (also z. B. „$a < b$“), um auszudrücken, dass $(a, b) \in R$ ist.*

Beispiel 1.4.3 *Ist P eine Partition einer Menge M, so können wir eine Relation $\sim$ wie folgt definieren: $a \sim b$ genau dann, wenn a und b im gleichen Teil von P liegen. Dies ist eine Äquivalenzrelation im Sinne der folgenden Definition.*

Definition 1.4.4 *Sei M eine Menge.*

(a) *Eine **Äquivalenzrelation** auf M ist eine Relation $\sim$ auf M mit folgenden Eigenschaften:*
   (i) $\forall a \in M\colon a \sim a$ *(**Reflexivität**)*
   (ii) $\forall a, b \in M\colon (a \sim b \Rightarrow b \sim a)$ *(**Symmetrie**)*
   (iii) $\forall a, b, c \in M\colon (a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c)$ *(**Transitivität**)*
   *Ist dies der Fall, so wird „$a \sim b$“ oft ausgesprochen als „a ist **äquivalent** zu b“ oder „a und b sind **äquivalent**“.*

(b) *Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M und ist $a \in M$, so nennt man*

$$a/\!\sim := \{b \in M \mid b \sim a\}$$

*die **Äquivalenzklasse** von a. Man schreibt*

$$M/\sim := \{a/\sim \mid a \in M\}$$

für die Menge all dieser Äquivalenzklassen. (Den Schrägstrich „/“ spricht man in diesem Zusammenhang „modulo“ aus.)

Mo 4.11.

Beispiel 1.4.5 *Sind $a, m \in \mathbb{Z}$ und $m \neq 0$, so schreiben wir „$m \mid a$“ für: „a ist durch m **teilbar**.“ (D. h.: $\frac{a}{m}$ ist eine ganze Zahl.) Man sagt auch: m **teilt** a.*

Sei nun $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann wird durch

$$a \sim b :\iff m \mid a - b$$

*eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert. Die übliche Notation für diese Relation ist „$a \equiv b \mod m$“; man sagt: „a ist **kongruent** zu b modulo m“ oder „a und b sind **kongruent** modulo m“.*

Satz 1.4.6 *Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M, so ist $M/\sim$ eine Partition von M.*

Definition 1.4.7 *Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf einer Menge M.*

(a) *Die Abbildung $M \to M/\sim, a \mapsto a/\sim$ nennt man die **kanonische Abbildung** von M nach $M/\sim$.*
(b) *Ist $T \in M/\sim$ und $a \in T$, so nennt man a auch einen **Repräsentanten** von T.*

2 Algebraische Strukturen

2.1 Gruppen, Ringe, Körper

In Abschnitt 1.1 haben wir mit reellen Zahlen gearbeitet, aber welche Eigenschaften von Zahlen haben wir wirklich benötigt? In diesem Abschnitt werden wir dies präzise machen, indem wir entsprechende algebraische Strukturen einführen.

Definition 2.1.1 (a) *Eine **Gruppe** ist gegeben durch eine Menge G, eine Abbildung $\circ\colon G \times G \to G$ und ein Element $e \in G$ mit folgenden Eigentschaften:*
(i) $\forall a, b, c \in G\colon (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ *(**Assoziativität**)*
(ii) $\forall a \in G\colon a \circ e = e \circ a = a$ *(Man sagt, „e ist ein **neutrales Element** für $\circ$“.)*
(iii) $\forall a \in G\colon \exists b \in G\colon a \circ b = b \circ a = e$. *(Ein solches b heißt **Inverses** von a.)*
*Die Bedingungen (i)–(iii) nennt man die **Gruppenaxiome**. Man sagt „G ist eine Gruppe“ oder „$(G, \circ)$ ist eine Gruppe“ oder „$(G, \circ, e)$ ist eine Gruppe“, je nachem, was aus dem Kontext klar ist.*

(b) *Gilt außerdem* $\forall a, b \in G$: $a \circ b = b \circ a$, *so nennt man* G ***kommutativ*** *oder* ***abelsch***. *(Gilt* $a \circ b = b \circ a$, *so sagt man auch: „*a *und* b ***kommmutieren***“.)

Konvention 2.1.2 *Eine Abbildung, die man, wie das obige „*$\circ$“, *zwischen zwei Elemente schreibt, nennt man oft* ***Verknüpfung***.

Beispiel 2.1.3 *Ist* M *eine beliebige Menge, so bildet die Menge aller Bijektion von von* M *nach* M *eine Gruppe, mit der Verkettung von Abbildungen als Verknüpfung und* id_M *als neutralem Element. Diese Gruppe wird auch mit* $\mathrm{Sym}(M)$ *bezeichnet und die* ***symmetrische Gruppe*** *(auf* M*) genannt.*

Bemerkung 2.1.4 *Ist* G *eine Gruppe und sind* $a, a', b, b' \in G$, *so gilt:*

(a) $a \circ b = a' \circ b \quad \Rightarrow \quad a = a' \quad$ *und*
$a \circ b = a \circ b' \quad \Rightarrow \quad b = b'$

(b) $a \circ b = b \quad \Rightarrow \quad a = e \quad$ *und*
$a \circ b = a \quad \Rightarrow \quad b = e$

Bemerkung 2.1.5 *Ist* G *eine Gruppe und* $a \in G$, *so existiert genau ein* $b \in G$ *mit* $a \circ b = e$. *Insbesondere hat* a *genau ein Inverses, und um zu prüfen, ob* b *das Inverse von* a *ist, reicht es, zu prüfen, ob* $a \circ b = e$ *ist.*

Mi 6.11.

Notation 2.1.6 *Es gibt mehrere übliche Notationen für Gruppen; im Folgenden sind* a, b *Gruppenelemente und* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$*:*

(a) *Verknüpfung:* $a \circ b$*; neutrales Element:* e*; Inverses von* a*:* a^{-1}. *Wir definieren auch* $a^0 := e$, $a^n := \underbrace{a \circ \cdots \circ a}_{n \text{ mal}}$, $a^{-n} := (a^{-1})^n$

(b) ***Multiplikative Notation****: Verknüpfung:* $a \cdot b$ *(oder* ab*); neutrales Element:* 1*; Inverses von* a*:* a^{-1}. *Wir definieren auch* $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$, $a^0 := e$, $a^n := \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ mal}}$, $a^{-n} := (a^{-1})^n$

(c) ***Additive Notation****: Verknüpfung:* $a + b$*; neutrales Element:* 0*; Inverses von* a*:* $-a$. *Wir definieren auch* $a - b := a + (-b)$, $0 \cdot a := 0$, $n \cdot a := \underbrace{a + \cdots + a}_{n \text{ mal}}$, $(-n) \cdot a := n \cdot (-a)$

Wenn nicht anders angegeben, verwenden wir Notation (a).

Bemerkung 2.1.7 *Ist* G *eine Gruppe, so gilt für beliebige* $a, b \in G$ *und* $m, n \in \mathbb{Z}$*:*

(a) $(a^{-1})^{-1} = a$
(b) $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$
(c) $a^{m+n} = a^m \circ a^n$

Definition 2.1.8 (a) *Ein **Ring** ist eine Menge R mit zwei Verknüpfungen $+\colon R\times R \to R$ und $\cdot\colon R \times R \to R$ und mit Elementen $0 \in R$ und $1 \in R$, so dass die folgenden **Ringaxiome** gelten:*

(i) *$(R, +, 0)$ ist eine abelsche Gruppe.*

(ii) *$\cdot$ ist assoziativ und 1 ist ein neutrales Element für $\cdot$.*

(iii) $\forall a, b, c \in R\colon \big((a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \ \wedge \ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\big)$ *(**Distributivität**)*

(b) *Der Ring R heißt **kommutativ**, wenn die Verknüpfung $\cdot$ kommutativ ist.*

(c) *Ein **Körper** ist ein Ring K, bei dem $(K \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ eine abelsche Gruppe ist.*

(d) *Man nennt 0 auch das **Null-Element** von R und 1 das **Eins-Element**.*

Beispiel 2.1.9 *$\mathbb{Z}$ ist ein Ring. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ sind Körper.*

Konvention 2.1.10 (a) *Wenn wir einen Ring R als Gruppe auffassen, ist $(R, +)$ gemeint.*

(b) *Ist K ein Körper, so setzen wir $K^\times := K \setminus \{0\}$ und fassen dies als Gruppe mit $\cdot$ als Verknüpfung auf.*

Bemerkung 2.1.11 *Sei R ein Ring und seien $a, b \in R$. Dann gilt:*

(a) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$

(b) $a = 0 \vee b = 0 \Rightarrow a \cdot b = 0$

(c) *Ist R ein Körper, so gilt bei (b) auch die Umkehrung.*

Bemerkung 2.1.12 *Sei K ein Körper. Fast im gesamten Abschnitt 1.1 kann man „reelle Zahl“ durch „Element von K“ ersetzen:*

(a) *Sind $a_1, \dots, a_n, b \in K$, so nennt man „$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$“ eine **lineare Gleichung über** K (Definition 1.1.4). Analog definiert man ein **lineares Gleichungssystem über** K (Definition 1.1.8).*

(b) *(Koeffizienten)matrizen, elementare Tranformationen und die Normalform werden auch entsprechend definiert (Definitionen 1.1.9, 1.1.10, 1.1.13), wobei mit 0 und 1 jeweils das entsprechende Element von K gemeint ist.*

(c) *Mit einer Ausnahme gelten alle Aussagen aus Abschnitt 1.1 für beliebige Körper K: Lemma 1.1.7, Lemma 1.1.11, Satz 1.1.12, Satz 1.1.14 (Gauß-Elimination), Bemerkung 1.1.15.*

(d) *Die Ausnahme ist Korollar 1.1.16: Dieses muss wie folgt umformuliert werden: Ist $\underline{L}$ ein lineares Gleichungssystem mit mehr Variablen als Gleichungen, so hat $\underline{L}$ entweder gar keine Lösung oder mindestens $\#K$ viele Lösungen.*

Mo 11.11.

2.2 Unter- und Quotientenstrukturen

In diesem Abschnitt betrachten wir zwei Möglichkeiten, aus einer algebraischen Struktur eine neue („kleinere“) algebraische Struktur zu konstruieren: indem man eine Teilmenge nimmt, oder indem man Elemente, die ursprünglich verschieden waren, miteinander identifiziert. Auf diese Art können wir insbesondere einen Körper mit endlich vielen Elementen konstruieren.

Beispiel 2.2.1 (a) *Ist K ein Körper, so ist K^n eine abelsche Gruppe, mit der Verknüpfung*

$$(b_1, \ldots, b_n) + (b'_1, \ldots, b'_n) := (b_1 + b'_1, \ldots, b_n + b'_n).$$

Wenn wir in Zukunft K^n als Gruppe auffassen, ist diese Verknüpfung gemeint.

(b) *Wir betrachten nun eine lineare Gleichung der Form*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

(für $a_1, \ldots, a_n \in K$). Ihre Lösungsmenge $\{(c_1, \ldots, c_n) \in K^n \mid a_1 c_1 + \cdots + a_n c_n = 0\}$ auch eine Gruppe (mit der gleichen Verknüpfung). Sie ist eine Untergruppe von K^n im Sinne der folgenden Definition.

Definition 2.2.2 (a) *Sei $(G, \circ, e)$ eine Gruppe. Ist $H \subseteq G$ eine Teilmenge, so dass $(H, \circ|_{H\times H}, e)$ auch eine Gruppe ist, so nennt man H eine **Untergruppe** von G und G eine **Obergruppe** von H.*

(b) *Analog definert man **Unter-** und **Oberringe** und **Unter-** und **Oberkörper**.*

Bemerkung 2.2.3 (a) *Möchte man prüfen, dass eine Teilmenge H einer Gruppe G eine Untergruppe ist, so reicht es, folgendes zu prüfen:*

(i) *$e \in H$*

(ii) *H ist **abgeschlossen unter der Verknüpfung**, d. h. sind $a, b \in H$, so ist auch $a \circ b \in H$.*

(iii) *H ist **abgeschlossen unter Inversen**, d. h. ist $a \in H$, so ist auch $a^{-1} \in H$.*

(b) *Analoges gilt für Unterringe und Unterkörper.*

Lemma 2.2.4 *Eine Teilmenge H einer Gruppe G ist eine Untergruppe genau dann, wenn H nicht leer ist, und wenn für alle $a, b \in H$ gilt: $a \circ b^{-1} \in H$.*

Definition 2.2.5 *Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe und $H \subseteq G$ eine Untergruppe. Dann setzen wir $G/H := G/\sim$ (Aussprache: „G **modulo** H“), wobei $\sim$ die Äquivalenzrelation ist, die definiert ist durch*

$$a \sim b \iff a - b \in H.$$

Für die Äquivalenzklasse

$$a/\sim = \{a + h \mid h \in H\}$$

*schreibt man oft $a + H$ oder $\bar{a}$, und solche Äquivalenzklassen nennt man auch **Nebenklassen** von H.*

Beispiel 2.2.6 *Seien $a_1, \ldots, a_n, b \in K$. Wir nehmen an, dass die lineare Gleichung*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b$$

mindestens eine Lösung besitzt. Dann ist ihre Lösungsmenge eine Nebenklasse der Lösungsmenge von

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

Satz 2.2.7 *Ist $(G, +, 0)$ eine abelsche Gruppe und H eine Untergruppe, so ist auch G/H eine Gruppe mit der Verknüpfung*

$$\bar{a} + \bar{b} := \overline{a + b}$$

*und mit neutralem Element $\bar{0}$. (Man nennt G/H eine **Quotientengruppe** oder **Faktorgruppe**.)*

Satz 2.2.8 *Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring, mit der Multiplikation*

$$\bar{a} \cdot \bar{b} := \overline{a \cdot b}$$

*und mit Eins-Element $\bar{1}$. ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist ein **Quotientenring**.)*

Satz 2.2.9 *Ist p eine Primzahl, so ist der Ring $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sogar ein Körper.*

Definition 2.2.10 *Der Körper $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (für p prim) wird mit $\mathbb{F}_p$ bezeichnet. Die Elemente von $\mathbb{F}_p$ werden mit $0, 1, \ldots, n-1$ bezeichnet (statt mit $\bar{0}$, $\bar{1}$, …, $\overline{n-1}$).*

Mi 13.11.

2.3 Polynomringe

In diesem Abschnitt werden die Grundlagen zu Polynomen eingeführt. Sie werden gegen Ende des Semesters nützlich sein, um gewisse Probleme aus der linearen Algebra zu lösen (nämlich um die Eigenwerte einer Matrix zu bestimmen). Der Polynomring dient auch als (wichtiges) Beispiel für einen Ring.

Definition 2.3.1 *Eine **Folge** von Elementen einer Menge M ist eine Funktion $a\colon \mathbb{N} \to M$, wobei man a_i statt $a(i)$ schreibt und $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ statt a. Wir schreiben $M^{\mathbb{N}}$ für die Menge aller Folgen von Elementen von M.*

Konvention 2.3.2 *Ist A eine mathematische Aussage, in der eine Variable x vorkommt, so bedeutet „A gilt für **fast alle** $x \in M$“: Es gibt nur endlich viele Elemente in M, für die A nicht gilt. (Anders ausgedrückt: Die Menge $\{x \in M \mid \neg A\}$ ist endlich.)*

Definition 2.3.3 *Sei R ein kommutativer Ring und x eine Variable.*

(a) *Ein* ***Polynom*** *in x über R ist ein Ausdruck der Form*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_n \in R$. Wir setzen $a_i = 0$ für $i > n$, so dass ein Polynom formal gegeben ist durch eine Folge $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$, wobei fast alle a_i gleich 0 sind.

(b) *Die Menge aller Polynome in x über R wird mit $R[x]$ bezeichnet.*

Notation 2.3.4 *Ist $a_i = 0$ für $i > n$, so schreiben wir statt $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ auch $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i$.*

Definition 2.3.5 *Sind $f = \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i x^i$ und $g = \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i x^i$ zwei Polynome in $R[x]$, so definieren wir die Summe $f + g \in R[x]$ und das Produkt $f \cdot g \in R[x]$ so, wie man es von Termen erwartet:*

$$f + g := \sum_{i\in\mathbb{N}} (a_i + b_i) x^i$$

$$f \cdot g := \sum_{i\in\mathbb{N}} \Big(\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}\Big) x^i$$

Satz 2.3.6 *Ist R ein kommutativer Ring, so ist auch $R[x]$ ist ein kommutativer Ring.*

Mo 18.11.

Konvention 2.3.7 *Wir fassen einen kommutativen Ring R als Unterring von $R[x]$ auf, indem wir jedes Element $a \in R$ mit dem Polynom $ax^0 \in R[x]$ identifizieren.*

Definition 2.3.8 *Sei R ein kommutativer Ring und $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \in R[x]$ ein Polynom über R. Der* ***Grad*** *$\deg f \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ von f ist wie folgt definiert: Ist f nicht das Nullpolynom, so ist $\deg f := \max\{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$. Den Grad des Nullpolynoms definieren wir als $-\infty$.*

Satz 2.3.9 *Sei R ein kommutativer Ring und seien $f, g \in R[x]$. Dann ist $\deg(f \cdot g) \leq \deg f + \deg g$. Ist R ein Körper, so gilt sogar $\deg(f \cdot g) = \deg f + \deg g$. Hierbei verwenden wir die Konvention $-\infty + a = -\infty$, für $a \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$.*

Definition 2.3.10 *Sei R ein kommutativer Ring und $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \in R[x]$ ein Polynom über R.*

(a) *Das Polynom f definiert eine Funktion von R nach R, die auch mit f bezeichnet wird: $f(b) := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b^n$. Hierbei verwenden wir die Konvention $0^0 := 1$.*

(b) *Eine* ***Nullstelle*** *von f ist ein Element $b \in R$ mit $f(b) = 0$.*

Bemerkung 2.3.11 *Ist R ein kommutativer Ring, sind $f, g \in R[x]$ und ist $a \in R$, so gilt: $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ und $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$.*

Satz 2.3.12 *Ist R ein kommutativer Ring, $f \in R[x]$ und ist $b \in R$ eine Nullstelle von f, so gibt es ein $g \in R[x]$ mit $f = (x-b) \cdot g$.*

Korollar 2.3.13 *Ist K ein Körper und $f \in K[x] \setminus \{0\}$, so lässt sich f schreiben in der Form*

$$f = \left(\prod_{i=1}^{n} (x - b_i) \right) \cdot g$$

schreiben, für $b_1, \ldots, b_n \in K$ und wobei $g \in K[x]$ ein Polynom ohne Nullstellen ist. Außerdem hat f maximal $\deg f$ verschiedene Nullstellen.

Bemerkung 2.3.14 *Der **Fundamentalsatz der Algebra** besagt, dass jedes nichtkonstante Polynom $f \in \mathbb{C}[x]$ mindestens eine Nullstelle besitzt, d. h. im Fall $K = \mathbb{C}$ ist das g aus Korollar 2.3.13 in $\mathbb{C}^\times$. Körper mit dieser Eigenschaft nennt man **algebraisch abgeschlossen**. In der Algebra-Vorlesung werden wir auch sehen: Jeder Körper hat einen algebraisch abgeschlossenen Oberkörper.*

Mi 20.11.

3 Vektorräume

3.1 Definition

Im Folgenden sei K ein Körper.

Definition 3.1.1 *Ein **Vektorraum** über K (auch: ein K-**Vektorraum**) ist eine abelsche Gruppe $(V, +)$, zusammen mit einer Verknüpfung $\cdot\colon K \times V \to V$, so dass für alle $r, s \in K$ und alle $u, v \in V$ gilt:*

(a) $r \cdot (u + v) = r \cdot u + r \cdot v$
(b) $(r + s) \cdot v = r \cdot v + s \cdot v$
(c) $(r \cdot s) \cdot v = r \cdot (s \cdot v)$
(d) $1 \cdot v = v$

*Die Elemente von V nennt man **Vektoren**, die Elemente von K nennt man **Skalare**; $+$ heißt **Vektoraddition**, $\cdot$ heißt **Skalarmultiplikation**. Das neutrale Element $0 \in V$ der Vektoraddition nennt man **Nullvektor**.*

In Abschnitt 3.1 habe ich die Vektorraddition, die Skalarmultiplikation und den Nullvektor in rot geschrieben, damit man sie von $+$, $\cdot$ und 0 in K unterscheiden kann.

Beispiel 3.1.2 *K^n ist ein Vektorraum mit der Skalarmultiplikation*

$$r \cdot (a_1, \ldots, a_n) := (r \cdot a_1, \ldots, r \cdot a_n).$$

Elemente von K^n werden oft $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ *geschrieben (statt $(a_1, \ldots, a_n)$).*

Beispiel 3.1.3 *$K[x]$ ist ein Vektorraum über K.*

Beispiel 3.1.4 *Ist M eine beliebige Menge, so ist $\mathrm{Abb}(M, K)$ ein K-Vektorraum, mit **punktweiser Vektorraddition** und **punktweiser Skalarmultiplikation**: $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$ und $(r \cdot f)(a) = r \cdot (f(a))$ für alle $f, g \in \mathrm{Abb}(A, K)$, alle $r \in K$ und alle $a \in M$.*

Beispiel 3.1.5 *Sei K ein Körper und seien $x_1, \ldots, x_n$ Variablen. Die Menge aller linearen Gleichungen über K in $x_1, \ldots, x_n$ bildet einen K-Vektorraum, mit der Vektoraddition und der Skalarmultiplikation aus Lemma 1.1.7.*

Satz 3.1.6 *Ist V ein K-Vektorraum, so gilt für alle $r \in K$ und alle $v \in V$:*

(a) $r \cdot v = 0 \iff (r = 0 \vee v = 0)$
(b) $(-1) \cdot v = -v$.

3.2 Untervektorräume

Sei weiterhin K ein Körper.

Definition 3.2.1 *Sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Ist $U \subseteq V$ eine Teilmenge, so dass $(U, +|_{U \times U}, \cdot|_{K \times U})$ auch ein K-Vektorraum ist, so nennt man U einen **Untervektorraum** von V.*

Lemma 3.2.2 *Eine Teilmenge U eines K-Vektorraums V ist ein Untervektorraum genau dann, wenn sie nicht leer ist und für alle $u, u' \in U$ und alle $r \in K$ gilt: $ru + u' \in U$.*

Mo 25.11.

Definition 3.2.3 *Wir nennen ein lineares Gleichungssystem L **homogen**, wenn die rechte Seite jeder Gleichung 0 ist, also wenn die Koeffizientenmatrix die Form*

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & 0 \end{array}\right)$$

hat.

Beispiel 3.2.4 *Ist $\underline{L}$ ein homogenes lineares Gleichungssystem über K in n Variablen, so ist die Lösungsmenge von $\underline{L}$ ein Untervektorraum von K^n.*

Definition 3.2.5 *Sei V ein K-Vektorraum.*

(a) *Eine **Linearkombination** von Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ ist ein Vektor der Form*

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i$$

*für $r_1, \ldots, r_n \in K$. Man nennt eine solche Linearkombination **nicht-trivial**, wenn mindestens eins der r_i nicht 0 ist. Man schreibt*

$$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K := \{\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i \mid r_1, \ldots, r_n \in K\}$$

für die Menge aller Linearkombinationen von $v_1, \ldots, v_n$.
Ist allgemeiner $A \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge von V, so schreibt man

$$\langle A \rangle_K := \{\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i \mid n \in \mathbb{N}, r_i \in K, v_i \in A\}.$$

für die Menge aller Linearkombinationen von (jeweils endlich vielen) Vektoren aus A.
*Man nennt $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K$ bzw. $\langle A \rangle_K$ die **lineare Hülle** (oder den **Span** oder das **Erzeugnis**) von $v_1, \ldots, v_n$ bzw. von A.*
Das Erzeugnis der leere Mengen definiert man als $\langle \emptyset \rangle_K := \{0\}$.

(b) *Gilt $\langle A \rangle_K = V$, so nennt man A ein **Erzeugendensystem** von V; man sagt auch: A **erzeugt** V.*

Satz 3.2.6 *Sei V ein K-Vektorraum und $A \subseteq V$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist $\langle A \rangle_K$ der kleinste Untervektorraum von V, der A enthält. Mit „kleinste“ ist gemeint: Ist $U \subseteq V$ ein beliebiger Untervektorraum, der A enthält, so ist $\langle A \rangle_K \subseteq U$.*

Korollar 3.2.7 *Ist V ein K-Vektorraum, $A \subseteq V$ und $B \subseteq \langle A \rangle_K$, so ist $\langle A \cup B \rangle_K = \langle A \rangle_K$.*

3.3 Lineare Unabhängigkeit

Sei weiterhin K ein Körper, und sei außerdem V ein K-Vektorraum.

Definition 3.3.1 (a) *Eine **lineare Abhängigkeit** zwischen Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ ist eine nicht-triviale Linearkombination*

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot v_i,$$

die gleich 0 ist. Existiert eine lineare Abhängigkeit zwischen den Vektoren $v_1, \ldots, v_n$, so nennt man das Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ ***linear abhängig****; sonst nennt man es* ***linear unabhängig****. Man sagt auch: „Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind linear (un)abhängig" (und meint damit, dass das Tupel linear (un)abhängig ist).*

(b) *Eine Teilmenge $A \subseteq V$ heißt* ***linear abhängig****, wenn endlich viele, paarweise verschiedene Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in A$ existieren, die linear abhängig sind.*

Lemma 3.3.2 *Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ist $\sum_{i=1}^{n} r_i v_i = 0$ eine lineare Abhängigkeit mit $r_n \neq 0$, so ist $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K = \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle_K$.*

Mi 27.11.

Satz 3.3.3 *Seien $v_1, \ldots, v_{n-1} \in V$ linear unabhängig und sei $v_n \in V \backslash \langle v_1, \ldots, v_{n-1} \rangle_K$. Dann sind auch $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.*

3.4 Basis und Dimension

Sei weiterhin K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

Definition 3.4.1 *Sei B entweder eine Teilmenge von V oder ein Tupel von Vektoren aus V. Man nennt B eine* ***Basis*** *von V, wenn B linear unabghängig ist und V erzeugt.*

Beispiel 3.4.2 *In K^n bilden die Vektoren*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basis von K^n, die ***Standardbasis****.*

Satz 3.4.3 *Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Dann sind äquivalent:*

(a) *$(v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Basis von V.*

(b) *$(v_1, \ldots, v_n)$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V, d. h. $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_K = V$, aber für jedes $i \leq n$ gilt: $\langle v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle_K \neq V$.*

(c) *$(v_1, \ldots, v_n)$ ist ein maximales linear unabhängiges Tupel, d. h. $(v_1, \ldots, v_n)$ ist linear unabhängig, aber für jeden weiteren Vektor $v_{n+1} \in V$ ist das Tupel $(v_1, \ldots, v_{n+1})$ linear abhängig.*

(d) *Jeder Vektor $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise als Linearkombintation der Vektoren v_i schreiben, d. h. für jedes $v \in V$ existiert genau ein Tupel $(r_1, \ldots, r_n) \in K^n$, so dass $\sum_{i=1}^{n} r_i v_i = v$ gilt.*

Satz 3.4.4 (Basisergänzungssatz) *Entweder V besitzt eine Basis $v_1, \dots, v_n$, oder es existiert eine unendliche linear unabhängige Menge $\{v_i \mid i \in \mathbb{N}_{\geq 1}\} \subseteq V$. Sind linear unabhängige Vektoren $w_1, \dots, w_k \in V$ gegeben, so kann (in beiden Fällen) außerdem $v_1 = w_1, \dots, v_k = w_k$ gewählt werden.*

Mo 2.12.

Bemerkung 3.4.5 *Es gilt sogar allgemeiner: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis. (Ohne Beweis.)*

Lemma 3.4.6 *Ist $v_1, \dots, v_n \in V$ ein Erzeugendensystem von V und sind $w_1, \dots, w_m \in V$ beliebig mit $m > n$, so sind $w_1, \dots, w_m$ linear abhängig.*

Satz 3.4.7 *Sind $v_1, \dots, v_n$ und $w_1, \dots, w_m$ zwei Basen eines Vektorraums V, so gilt $n = m$.*

Bemerkung 3.4.8 *Man kann definieren, was die **Kardinalität** einer unendlichen Menge ist. Die präzise Definition ist kompliziert, aber die wichtigste Eigenschaft dieser Definition ist: Zwei (beliebige) Mengen M und M' haben die gleiche Kardinalität genau dann, wenn eine Bijektion $M \to M'$ existiert. (Man nennt eine unendliche Menge **abzählbar (unendlich)**, wenn Sie die gleiche Kardinalität wie $\mathbb{N}$ hat und **überabzählbar** sonst.)*

Mit dieser Definition gilt die folgende Verallgemeinerung von Satz 3.4.7: Sind $B, B' \subseteq V$ zwei Basen eines Vektorraums V, so haben B und B' die gleiche Kardinalität. (Ohne Beweis.)

Definition 3.4.9 *Die **Dimension** eines Vektorraums V ist die Kardinalität einer beliebigen Basis von V; Notation dafür: $\dim V$. Man nennt V **endlich dimensional**, wenn $\dim V \in \mathbb{N}$ ist und **unendlich dimensional** sonst.*

Satz 3.4.10 *Sei V endlich-dimensional und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann ist $\dim U \leq \dim V$, und aus $\dim U = \dim V$ folgt $U = V$.*

Bemerkung 3.4.11 *Sind $U, U' \subseteq V$ Untervektorräume, so sind auch $U \cap U'$ und*

$$U + U' := \{u + u' \mid u \in U, u' \in U'\}$$

*Untervektorräume von V. (Man nennt $U + U'$ die **Summe** von U und U').*

Satz 3.4.12 *Für beliebige Untervektorräume $U, U' \subseteq V$ eines endlich-dimensionalen Vektorraums V gilt:*

$$\dim(U + U') = \dim U + \dim U' - \dim(U \cap U').$$

Mi 4.12.

4 Lineare Abbildungen und Matritzen

4.1 Matrizen

Sei weiterhin K ein Körper.

Hier sind einige Ergänzungen zur Definition von Matrizen (1.1.9):

Definition 4.1.1 *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $a_{i,j} \in K$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$.*

(a) *Betrachtet man die $m \times n$-Matrix mit Einträgen $a_{i,j}$, so lässt man in der Notation oft das Komma im Index weg:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Außerdem schreibt man für für diese Matrix auch $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ oder $(a_{ij})_{ij}$.

(b) *Man nennt eine Matrix **quadratisch**, wenn sie gleich viele Zeilen wie Spalten hat, also wenn $m = n$ ist.*

(c) *Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über K wird mit $K^{m \times n}$ bezeichnet und auf übliche Weise als K-Vektorraum aufgefasst (d. h. mit komponentenweiser Vektoraddition und Skalarmultiplikation). Die Matrix, deren Einträge alle 0 sind, heißt **Nullmatrix** (und wird wie üblich selbst mit 0 bezeichnet).*

Definition 4.1.2 *Seien $\ell, m, n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Ist $A = (a_{ij})_{ij} \in K^{\ell \times m}$ und $B = (b_{jk})_{jk} \in K^{m \times n}$, so definieren wir das **(Matrix-)Produkt** $A \cdot B$ als diejenige Matrix $(c_{ik})_{ik} \in K^{\ell \times n}$, die gegeben ist durch*

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}.$$

(Statt $A \cdot B$ schreibt man auch AB.)

(b) *Wir identifizieren n-Tupel in K^n oft mit der entsprechenden Matrix in $K^{n \times 1}$, die nur aus einer Spalte besteht. Dadurch können wir eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ als Abbildung von K^n nach K^m auffassen, die $v \in K^n$ abbildet auf das Matrixprodukt $Av \in K^m$.*

Satz 4.1.3 *Das Matrixprodukt entspricht der Verknüpfung der entsprechenden Abbildungen: Ist $A \in K^{\ell \times m}$, $B \in K^{m \times n}$ und $v \in K^n$, so gilt $(AB)v = A(Bv)$.*

Notation 4.1.4 *Sind $v_1, \ldots, v_n \in K^m$, so schreiben wir $(v_1 \mid \cdots \mid v_n)$ für die Matrix, die man erhält, indem man die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ als Spalten nebeneinander schreibt.*

Bemerkung 4.1.5 *Für eine Matrix* $A = (v_1 \mid \cdots \mid v_n) \in K^{m\times n}$ *mit Spalten* $v_i \in K^m$ *gilt:*

$$A \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i.$$

Insbesondere gilt für Standard-Basisvektoren $e_i \in K^n$ *(siehe Beispiel 3.4.2)* $Ae_i = v_i$*, und das Bild* $\operatorname{im} A$ *(im Sinne von Definition 1.3.10) ist genau das Erzeugnis* $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle_K$*.*

Beispiel 4.1.6 *Ist* $A = (a_{ij})_{ij} \in K^{m\times n}$ *und* $\underline{b} = (b_i)_i \in K^m$*, so lässt sich das Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix*

$$\left(\, A \,\middle|\, \underline{b} \,\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

jetzt als eine einzige Gleichung in K^m *schreiben, nämlich* $A\underline{x} = \underline{b}$*, wobei* $\underline{x}$ *als eine Variable in* K^n *aufgefasst wird.*

Definition 4.1.7 *Sei* $n \in \mathbb{N}$*. Die* ***Einheitsmatrix*** $I_n \in K^{n\times n}$ *ist die Matrix, die der Identitätsabbildung* $K^n \to K^n$ *entspricht:*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mo 9.12.

Lemma 4.1.8 *Für Matrizen* $A, A' \in K^{k\times \ell}$*,* $B, B' \in K^{\ell\times m}$ *und* $C \in K^{m\times n}$ *gilt:*

(a) $(AB)C = A(BC)$
(b) $I_k A = A$ *und* $AI_\ell = A$*.*
(c) $(rA)B = r(AB)$ *und* $A(rB) = r(AB)$*.*
(d) $(A + A')B = AB + A'B$ *und* $A(B + B') = AB + AB'$

Achtung: Das Analogon von Bemerkung 2.1.4 gilt *nicht* für Matrixmultiplikation, d. h. aus $AB = A'B$ folgt i. A. *nicht* $A = A'$ (für Matrizen A, A', B).

Bemerkung 4.1.9 *Insbesondere gilt, für* $A \in K^{m\times n}, v, v' \in K^n$ *und* $r \in K$*:* $A(v + v') = Av + Av'$ *und* $A(rv) = r(Av)$*.*

Korollar 4.1.10 $K^{n\times n}$ *ist mit der Matrixmultiplikation ein Ring;* I_n *ist das neutrale Element der Multiplikation.*

Notation 4.1.11 *Ist $A \in K^{n\times n}$ und $k \in \mathbb{N}$, so setzen wir $A^m := \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ mal}}$ falls $k \geq 1$ und $A^0 := I_n$.*

4.2 Lineare Abbildungen

Sei weiterhin K ein Körper.

Definition 4.2.1 *Seien V und W K-Vektorräume. Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt **linear** oder **(Vektorraum-) Homomorphismus**, wenn für alle $v, v' \in V$ und alle $r \in K$ gilt:*

$$f(v + v') = f(v) + f(v') \qquad \text{und} \qquad f(rv) = rf(v).$$

Die Menge aller Vektorraum-Homomorphismen von V nach W wird mit $\mathrm{Hom}(V, W)$ bezeichnet. (Manchmal schreibt man auch $\mathrm{Hom}_K(V, W)$.)

Beispiel 4.2.2 *Jede durch eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ gegebene Abbildung von K^n nach K^m ist linear.*

Bemerkung 4.2.3 (a) *Eine Abbildung $f\colon V \to W$ ist linear genau dann, wenn für alle $v, v' \in V$ und alle $r \in K$ gilt: $f(rv + v') = rf(v) + f(v')$.*
(b) *Ist f linear, so gilt automatisch auch $f(0) = 0$.*

Bemerkung 4.2.4 *Sind U, V und W K-Vektorräume und $f\colon U \to V$ und $g\colon V \to W$ lineare Abbildungen, so ist auch die Verknüpfung $g \circ f\colon U \to W$ ist eine lineare Abbildung.*

Satz 4.2.5 *Sind V und W K-Vektorräume, ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und sind $w_1, \ldots, w_n$ beliebige Vektoren in W, so gibt es genau eine lineare Abbildung $f\colon V \to W$, die v_i auf w_i abbildet für $1 \leq i \leq n$.*

Korollar 4.2.6 *Die linearen Abbildungen von K^n nach K^m sind genau diejenigen Abbildungen, die durch Matrizen $A \in K^{m\times n}$ gegeben sind. Wir haben also eine Bijektion von $K^{m\times n}$ nach $\mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ (die einer Matrix die zugehörige Abbildung zuordnet).*

Mi 11.12.

Korollar 4.2.7 *Seien V und W K-Vektorräume, sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V und sei $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von W. Dann erhalten wir eine Bijektion*

$$K^{m\times n} \to \mathrm{Hom}(V, W),$$

die eine Matrix $A := (a_{ij})_{ij}$ *abbildet auf die lineare Abbildung* $f\colon V \to W$*, die definiert ist durch*

$$f(\sum_{j=1}^{n} r_j v_j) = \sum_{i=1}^{m} s_i w_i \text{ für } \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \in K^n \text{ beliebig und } \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}.$$

Definition 4.2.8 *Die Matrix* A *aus Korollar 4.2.7 nennt man die* ***Matrix von*** f *bezüglich der Basen* $(v_j)_j$ *und* $(w_i)_i$*.*

Korollar 4.2.9 *Sind* V *und* W K*-Vektorräume und* $U \subseteq V$ *ein Untervektorraum, so lässt sich jede lineare Abbildung* $U \to W$ *zu einer linearen Abbildung* $V \to W$ *fortsetzen.*

Definition 4.2.10 *Der* ***Kern*** *einer linearen Abbildung* $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *ist*

$$\ker f := \{v \in V \mid f(v) = 0\}.$$

Satz 4.2.11 *Seien* V *und* W K*-Vektorräume und* $f\colon V \to W$ *eine lineare Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Das Bild* $\mathrm{im}\, f$ *ist ein Untervektorraum von* W *(vgl. Definition 1.3.10).*
(b) *Der Kern* $\ker f$ *ist ein Untervektorraum von* V*.*
(c) *Für* $v, v' \in V$ *gilt:* $f(v) = f(v') \iff v - v' \in \ker f$*. Insbesondere ist* f *injektiv genau dann, wenn* $\ker f = \{0\}$ *ist.*

Definition 4.2.12 *Seien* V *und* W K*-Vektorräume.*

(a) *Eine bijektive lineare Abbildung* $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *nennt man einen* ***(Vektorraum-) Isomorphismus****. Um auszudrücken, dass eine Abbildung* $f\colon V \to W$ *ein Isomorphismus ist, schreiben wir auch* $f\colon V \xrightarrow{\sim} W$*.*
(b) *Man sagt, ein* K*-Vektorraum ist* V *ist* ***isomorph*** *zu einem* K*-Vektorraum* W*, wenn ein Isomorphismus* $f\colon V \to W$ *existiert. Statt „*V *ist isomorph zu* W*“ sagt man auch „*V *und* W *sind isomorph (zueinander)“. Notation dafür:* $V \cong W$*.*

Beispiel 4.2.13 *Ist* V *ein* K*-Vektorraum und* $v_1, \ldots, v_n$ *eine Basis von* V*, so ist*

$$K^n \to V, \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$$

ein Isomorphismus von Vektorräumen.

Satz 4.2.14 *Seien V und W K-Vektorräume und sei $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus. Dann ist die inverse Abbildung $f^{-1}\colon W \to V$ auch ein Isomorphismus.*

Bemerkung 4.2.15 *Ist $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ ein Isomorphismus von Vektorräumen, so lassen sich mit f „Eigenschaften zwischen V und W übertragen", z. B. gilt:*

(a) *Seien $v_1,\dots,v_n \in V$ und $w_1 := f(v_1),\dots,w_n := f(v_n)$. Dann sind $v_1,\dots,v_n$ linear unabhängig / ein Erzeugendensystem von V / eine Basis von V genau dann, wenn $w_1,\dots,w_n$ linear unabhängig / ein Erzeugendensystem von W / eine Basis von W sind.*

(b) $\dim V = \dim W$.

(c) *Für $U_V \subseteq V$ und $U_W := f(U_V) \subseteq W$ gilt: U_V ist ein Untervektorraum von V genau dann, wenn U_W ein Untervektorraum von W ist.*

Mo 16.12.

Bemerkung 4.2.16 *Seien V und W K-Vektorräume, sei $v_1,\dots,v_n$ eine Basis von V, sei $w_1,\dots,w_m$ eine Basis von W, und sei $f\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Die Matrix von f bezüglich der Basen $(v_i)_i$ und $(w_j)_j$ (aus Korollar 4.2.7) ist gerade die Matrix der Verknüpfung $g_W^{-1} \circ f \circ g_V\colon K^n \to K^m$, wobei $g_V\colon K^n \to V$ und $g_W\colon K^m \to W$ die Isomorphismen aus Beispiel 4.2.13 sind (angewandt auf die Basis $(v_i)_i$ von V und die Basis $(w_j)_j$ von W).*

Definition 4.2.17 *Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt **invertierbar**, wenn die durch A definierte Abbildung $K^n \to K^n$ ein Isomorphismus ist. Die Matrix, die die inverse Abbildung definiert, heißt zu A **inverse Matrix**; Notation dafür: A^{-1}.*

Bemerkung 4.2.18 *Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist also invertierbar genau dann, wenn eine Matrix $B \in K^{n\times n}$ existiert mit $AB = BA = I_n$. Ist dies der Fall, so ist $A^{-1} = B$.*

Satz 4.2.19 *Sind $v_1,\dots,v_n$ und $v_1',\dots,v_n'$ zwei Basen des selben K-Vektorraums V, so existiert eine invertierbare Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit der folgenden Eigenschaft: Ist $v \in V$ beliebig, und schreiben wir v als Linearkombintationen*

$$v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i = \sum_{i=1}^{n} r_i' v_i'$$

(für $r_i, r_i' \in K$), so gilt

$$A \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1' \\ \vdots \\ r_n' \end{pmatrix}.$$

*(Man nennt A die **Basiswechselmatrix** zwischen den Basen $(v_i)_i$ und $(v_i')_i$.)*

4.3 Homomorphiesatz und Rang

Sei weiterhin K ein Körper.

Satz 4.3.1 *Sei V ein K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann wird die Quotientengruppe V/U aus Satz 2.2.7 mit der folgenden Skalarmultiplikation zu einem K-Vektorraum:*

$$r \cdot \bar{v} := \overline{rv}.$$

*(Man nennt V/U einen **Quotientenvektorraum** oder **Faktorvektorraum**.)*

Bemerkung 4.3.2 *Die kanonische Abbildung $V \to V/U, v \mapsto \bar{v}$ (vgl. Definition 1.4.7) ist linear.*

Satz 4.3.3 *Ist V ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, so gilt* $\dim V = \dim U + \dim(V/U)$.

Mi 18.12.

Satz 4.3.4 *Seien V und W K-Vektorräume, sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, und sei* $\mathrm{can}\colon V \to V/U$ *die kanonische Abbildung. Es existiert genau dann ein $g \in \mathrm{Hom}(V/U, W)$ mit $f = g \circ \mathrm{can}$, wenn $U \subseteq \ker f$ ist.*

Satz 4.3.5 (Homomorphiesatz) *Sind V und W K-Vektorräume und ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, so erhält man einen Isomorphismus*

$$\tilde{f}\colon V/(\ker f) \to \mathrm{im}\, f, \bar{v} \mapsto f(v).$$

Definition 4.3.6 (a) *Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume. Der **Rang** einer linearen Abbildung $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ist*

$$\mathrm{rk}\, f := \dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(V/\ker(f)) = \dim V - \dim \ker(f).$$

(b) *Der **Rang** $\mathrm{rk}\, A$ einer Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist der Rang der zugehörigen Abbildung $K^n \to K^m$.*

Bemerkung 4.3.7 *Sind V und W zwei endich-dimensionale K-Vektorräume und ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, so gilt:*

(a) *Die Abbildung f ist injektiv genau dann, wenn $\mathrm{rk}\, f = \dim V$; ist f nicht injektiv, so ist $\mathrm{rk}\, f < \dim V$.*
(b) *Die Abbildung f ist surjektiv genau dann, wenn $\mathrm{rk}\, f = \dim W$; ist f nicht surjektiv, so ist $\mathrm{rk}\, f < \dim W$.*

Satz 4.3.8 (Sylvesters Rang-Ungleichung) *Sind U, V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume und $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$ lineare Abbildungen, so gilt*

$$\operatorname{rk}(f) + \operatorname{rk}(g) - \dim V \leq \operatorname{rk}(g \circ f) \leq \min\{\operatorname{rk} g, \operatorname{rk} f\}.$$

Insbesondere: Ist f surjektiv, so ist $\operatorname{rk}(g \circ f) = \operatorname{rk} g$; und: Ist g injektiv, so ist $\operatorname{rk}(g \circ f) = \operatorname{rk} f$.

Mo 6.1.

Bemerkung 4.3.9 *Die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über K bildet eine Gruppe, mit der Matrix-Multiplikation als Verknüpfung und I_n als neutralem Element. Diese Gruppe wird mit $\mathrm{GL}_n(K)$ bezeichnet.*[5]

Korollar 4.3.10 *Sind $A, B \in K^{n\times n}$ Matrizen mit $AB = I_n$, so sind beide Matrizen invertierbar, und invers zueinander (d. h. es gilt $A^{-1} = B$).*

4.4 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

Sei weiterhin K ein Körper.

Satz 4.4.1 *Für jede Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in K^{m\times n}$ sind die folgenden Zahlen gleich:*

(a) *der Rang von A;*

(b) *der **Spaltenrang** von A, d. h. die Dimension des Erzeugnisses*

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} \right\rangle_K$$

der Spalten von A;

(c) *der **Zeilenrang** von A, d. h. die Dimension des Erzeugnisses*

$$\langle (a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}), \ldots, (a_{m,1}, \ldots, a_{m,n}) \rangle_K$$

der Zeilen von A.

Inbesondere ist die Dimension des Lösungsraums von $A\underline{x} = 0$ gleich n (Anzahl der Variablen) minus der maximalen Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A.

Bemerkung 4.4.2 *Jede Zeile eines Matrix-Produkts BA (für $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{\ell\times m}$) ist eine Linearkombination der Zeilen von A: Sind $z_1, \ldots, z_m \in K^{1\times n}$ die Zeilen von A und ist $(b_{i,1}, \ldots, b_{i,m})$ die i-te Zeile von B, so ist die i-te Zeile von BA gleich*

$$b_{i,1}z_1 + \cdots + b_{i,m}z_m.$$

[5] Auf englisch heißt sie „general linear group“; daher „GL“

Insbesondere: Ist A eine Matrix und erhält man A' aus A durch eine elementare Zeilentransformation (siehe Definition 1.1.10), so gilt $A' = EA$ für eine Matrix $E \in K^{m\times m}$.

Definition 4.4.3 *Die Matrizen E aus Bemerkung 4.4.2, die elementaren Transformationen entsprechen, nennt man **Elementarmatrizen**. Die Elementarmatrizen sind also die Matrizen $E = (e_{ij})_{ij}$ mit:*

(TAU) Zeilen k und ℓ vertauschen (für $1 \le k, \ell \le m$, $k \neq \ell$): $e_{ii} = 1$ falls $i \notin \{k, \ell\}$; $e_{k\ell} = e_{\ell k} = 1$; alle anderen e_{ij} sind 0;

(MUL) Zeile k mit $r \in K^\times$ multiplizieren ($1 \le k \le m$): $e_{ii} = 1$ falls $i \neq k$; $e_{kk} = r$; alle anderen e_{ij} sind 0;

(ADD) das r-fache von Zeile k zu Zeile ℓ addieren (für $r \in K$ und $1 \le k, \ell \le m$, $k \neq \ell$): $e_{ii} = 1$; $e_{\ell k} = r$; alle anderen e_{ij} sind 0.

Satz 4.4.4 *Elementarmatrizen sind invertierbar, und das Inverse einer Elementarmatrix ist auch eine Elementarmatrix.*

Definition 4.4.5 *Die **Transponierte** einer Matrix $A = (a_{ij})_{1\le i\le m, 1\le j\le n} \in K^{m\times n}$ ist die Matrix $A^T := (a_{ji})_{1\le j\le n, 1\le i\le m} \in K^{n\times m}$.*

Bemerkung 4.4.6 (a) *Für $A \in K^{m\times n}$ gilt: $(A^T)^T = A$*
(b) *Für $A, B \in K^{m\times n}$ gilt: $(A + B)^T = A^T + B^T$*
(c) *Für $A \in K^{\ell\times m}$ und $B \in K^{m\times n}$ gilt: $(AB)^T = B^T A^T$.*
(d) *Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist invertierbar genau dann, wenn A^T invertierbar ist, und ist dies der Fall, so gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*
(e) *Ist $E \in K^{n\times n}$ eine Elementarmatrix, so ist auch E^T eine Elementarmatrix.*

Bemerkung 4.4.7 *Ist $A \in K^{m\times n}$ beliebig und $E \in K^{n\times n}$ eine Elementarmatrix, so erhält man AE aus A durch eine **elementare Spaltentransformation**, d. h. Tauschen von Spalten bzw. Multiplikation einer Spalte mit $r \in K^\times$ bzw. Addition des r-fachen einer Spalte zu einer anderen Spalte.*

Mi 8.1.

Bemerkung 4.4.8 *Ist $A \in K^{n\times n}$ eine quadratische Matrix in Normalform mit $\operatorname{rk} A = n$, so ist bereits $A = I_n$.*

Satz 4.4.9 *Ist $A \in K^{n\times n}$, und wendet man auf die (erweiterte) Matrix $(A \mid I_n)$ Zeilentransformationen so an, dass beim Ergebnis $(A' \mid B')$ die Matrix A' in Normalform ist, so gilt: A ist invertierbar genau dann wenn $A' = I_n$; insbesondere lässt sich jede invertierbare Matrix als Produkt von Elementarmatrizen schreiben. Außerdem ist dann $B' = A^{-1}$.*

5 Endomorphismen

Im ganzen Kapitel sei weiterhin K ein Körper.

5.1 Determinanten

Definition 5.1.1 *Seien $V_1, \dots, V_n$ und W K-Vektorräume. Eine Abbildung $f\colon V_1 \times \dots \times V_n \to W$ heißt **multilinear**, wenn für alle $v_1 \in V_1, \dots, v_n \in V_n$ und alle $1 \leq i \leq n$ die Abbildung*

$$V_i \to W, v' \mapsto f(v_1, \dots, v_{i-1}, v', v_{i+1}, \dots, v_n)$$

*linear ist. Im Fall $n = 2$ nennt man f auch **bilinear**.*

Satz 5.1.2 *Es existiert genau eine Abbildung $f\colon K^{n\times n} \to K$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) *Die Abbildung*

$$K^n \times \dots \times K^n \to K, (v_1, \dots, v_n) \mapsto f((v_1 \mid \dots \mid v_n))$$

ist multilinear.

(b) *f ist **alternierend**, d. h. falls $A \in K^{n\times n}$ zwei gleiche Spalten hat, so ist $f(A) = 0$.*

(c) *f ist **normiert**, d. h. $f(I_n) = 1$.*

Definition 5.1.3 *Die Abbildung f aus Satz 5.1.2 wird mit* det *bezeichnet. Ist $A \in K^{n\times n}$, so nennt man* $\det A$ *die **Determinante** von A.*

Beispiel 5.1.4 *Im Fall $n = 2$ erfüllt*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

die Eigenschaften aus Satz 5.1.2.

Mo 13.1.

Lemma 5.1.5 *Im Folgenden sei $A \in K^{n\times n}$ beliebig und $E \in K^{n\times n}$ eine Elementarmatrix. Wir nehmen an, dass* $\det\colon K^{n\times n} \to K$ *eine Abbildung mit den Eigenschaften aus Satz 5.1.2 ist. Dann gilt:*

(a) $\det(AE) = \det A \cdot \det E$

(b)

$$\det E = \begin{cases} -1 & \text{falls } E \text{ zwei Spalten tauscht} \\ r & \text{falls } E \text{ eine Spalte mit } r \in K^\times \text{ multipliziert} \\ 1 & \text{falls } E \text{ das } r\text{-fache einer Spalte zu einer anderen Spalte addiert } (r \in K) \end{cases}$$

(c) *Enthält A eine Spalte, die nur aus 0en besteht, so ist* $\det A = 0$.

Bemerkung 5.1.6 *Aus dem Lemma ergibt sich eine Möglichkeit,* $\det A$ *zu berechnen:*

(a) *Forme A durch Spaltentransformationen zu einer Matrix $A' = AE_1 \cdots E_k$ in transponierter Normalform um (für Elementarmatrizen E_i). Es folgt:* $\det A' = \det A \cdot \det E_1 \cdots \det E_k$.

(b) *Wenn A' eine Nullspalte enthält, ist* $\det A = \det A' = 0$.
Wenn A' keine Nullspalten enthält, ist $A' = I_n$, und es folgt $\det A = (\det E_1 \cdots \det E_k)^{-1}$.
Außerdem gibt Lemma 5.1.5 (b) an, was $\det E_i$ *ist.*

Korollar 5.1.7 *Sei* $\det\colon K^{n\times n} \to K$ *eine Abbildung mit den Eigenschaften aus Satz 5.1.2. Dann gilt für beliebige Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$:*

(a) *A ist invertierbar genau dann, wenn* $\det A \neq 0$ *ist. Ist dies der Fall, so gilt* $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

(b) $\det AB = \det A \cdot \det B$.

(c) $\det A = \det A^T$. *Insbesondere gelten die Eigenschaften aus Satz 5.1.2 und Lemma 5.1.5 auch für Zeilen statt Spalten, und Determinanten können auch mit Zeilentransformationen berechnet werden.*

Mi 15.1.

Satz 5.1.8 (Laplacescher Entwicklungssatz) *Sei $n \geq 2$ und sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in K^{n\times n}$. Wir schreiben $A_{(k,\ell)}$ für die $(n-1)\times(n-1)$-Matrix, die man aus A erhält, indem man die k-te Zeile und die ℓ-te Spalte rausstreicht. Dann gilt für jedes $k \leq n$:*

$$\det A = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{k+\ell} \cdot a_{k,\ell} \cdot \det A_{(k,\ell)}.$$

(Man nennt diese Art, $\det A$ *zu berechnen, die „**Entwicklung** nach der k-ten Zeile“.)*

Beispiel 5.1.9 *Für Matrizen der Form*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

gilt: $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. *(Matritzen dieser Form nennt man **obere Dreiecksmatrizen**.)*

Bemerkung 5.1.10 *Da* $\det A = \det A^T$*, gilt auch die analoge Formel mit Zeilen statt Spalten, d. h. für jedes* $\ell \leq n$ *gilt:*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+\ell} \cdot a_{k,\ell} \cdot \det A_{(k,\ell)}.$$

*(Man nennt dies die „**Entwicklung** nach der* ℓ*-ten Spalte“.)*

Korollar 5.1.11 (Regel von Sarrus) *Die Determinante einer* 3×3*-Matrix lässt sich wie folgt berechnen:*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ \quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}$$

Bemerkung 5.1.12 (Leibniz-Formel) *Im Allgmeinen lässt sich die Determinante einer* $n \times n$*-Matrix* $A = (a_{ij})_{ij}$ *ausdrücken als eine Summe von Produkten der Form* $\pm a_{i_1,j_1} \cdots a_{i_n,j_n}$*, wobei es je einen Summenden gibt für jede Möglichkeit, aus jeder Zeile und jeder Spalte genau einen Matrix-Koeffizienten auszuwählen. Genauer:*

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}(\{1,\ldots,n\})} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)},$$

wobei $\mathrm{Sym}(\{1,\ldots,n\})$ *die Menge der Bijektionen* $\{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ *ist (siehe Beispiel 2.1.3), und wobei das **Signum*** $\mathrm{sgn}(\sigma)$ *von* σ *wie folgt definiert ist: Wir betrachten die Matrix* $B_\sigma = (b_{ij})_{ij}$ *mit* $b_{i,\sigma(i)} = 1$ *und allen anderen Koeffizienten* 0 *und setzen* $\mathrm{sgn}(\sigma) := \det(B_\sigma) \in \{1, -1\}$*.*

Definition 5.1.13 *Sei* V *ein* K*-Vektorraum.*

(a) *Eine lineare Abbildung von* V *in sich selbst nennt man auch einen **Endomorphismus** von* V*. Die Menge aller Endomorphismen von* V *wird mit* $\mathrm{End}(V)$ *bezeichnet.*

(b) *Ein **Automorphismus** ist ein bijektiver Endomorphismus. Die Menge aller Automorphismen von* V *bildet eine Gruppe (mit der Verkettung von Abbildungen als Verknüpfung); diese wird mit* $\mathrm{Aut}(V)$ *(oder manchmal auch mit* $\mathrm{GL}(V)$*) bezeichnet.*

Mo 20.1.

Definition 5.1.14 *Sei* V *ein endlich-dimensionaler* K*-Vektorraum und* $f \in \mathrm{End}(V)$ *ein Endomorphismus. Die **Determinante** von* f *wird wie folgt definiert. Sei* $g \colon K^n \to V$ *ein beliebiger Isomorphismus und sei* $A \in K^{n \times n}$ *die Matrix zur Abbildung* $g^{-1} \circ f \circ g$*. Dann definiert man* $\det f := \det A$*.*

Lemma 5.1.15 *In Definition 5.1.14 hängt die Determinante* $\det A$ *nicht von der Wahl von* g *ab.*

5.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Definition 5.2.1 *Sei V ein K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Ein Skalar $\lambda \in K$ heißt **Eigenwert** von f, wenn es einen Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ gibt mit $f(v) = \lambda v$. In diesem Fall nennt man v einen **Eigenvektor** von f zum Eigenwert λ.*

Definition 5.2.2 *Sei $A \in K^{n\times n}$ und x eine Variable. Nach Bemerkung 5.1.12 ist die Determinante $\chi_A(x) := \det(xI_n - A)$ ein Polynom in x. Dieses Polynom nennt man das **charakteristische Polynom**[6] der Matrix A.*

Bemerkung 5.2.3 *Das charakteristische Polynom $\chi_A(x)$ einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ hat die Form*

$$\chi_A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n,$$

*wobei $a_0 = (-1)^n \cdot \det A$ ist. (Ein Polynom, bei dem – wie hier – die höchste x-Potenz mit dem Faktor 1 vorkommt, nennt man **normiert**.)*

Satz 5.2.4 *Sei $A \in K^{n\times n}$. Die Nullstellen von χ_A sind genau die Eigenwerte von A. Ist $\lambda \in K$ eine solche Nullstelle, so sind die Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ genau die Elemente von $\ker(\lambda I_n - A) \setminus \{0\}$.*

Definition 5.2.5 *Analog zu Definition 5.1.14 kann man das **charakteristische Polynom** auch für Endomorphismen f von endlich-dimensionalen Vektorräumen V definieren: Ist $g\colon K^n \to V$ ein Isomorphismus und $A \in K^{n\times n}$ die Matrix zur Abbildung $g^{-1} \circ f \circ g$, so definiert man $\chi_f := \chi_A$.*

Mi 22.1.

Definition 5.2.6 (a) *Eine Matrix der Form*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$$

*für $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ heißt **Diagonalmatrix** („mit **Diagonaleinträgen** $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$“).*

(b) *Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ heißt **diagonalisierbar**, wenn ein Isomorphismus $g\colon K^n \to V$ existiert, so dass $g^{-1} \circ f \circ g$ durch eine Diagonalmatrix gegeben ist.*

(c) *Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt **diagonalisierbar**, wenn der entsprechende Endomorphismus diagonalisierbar ist, d. h. wenn eine invertierbare Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ existiert, so dass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.*

[6] Manche Autoren verwenden ein anderes Vorzeichen in der Definition des charakteristischen Polynoms: $\chi_A(x) := \det(A - xI_n)$.

Bemerkung 5.2.7 *Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{End}(V)$ ist diagonalisierbar genau dann, wenn eine Basis von V aus Eigenvektoren von f existiert. Genauer:*

(a) *Ist $g\colon K^n \to V$ ein Isomorphismus, so dass $g^{-1} \circ f \circ g$ durch eine Diagonalmatrix mit Diagonaeinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gegeben ist, so ist $g(e_1), \ldots, g(e_n)$ eine Basis von V, und $g(e_i)$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i. (Hierbei ist $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis von K^n.)*

(b) *Ist umgekehrt $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V so, dass v_i ein Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist, so wählen wir den Isomorphismus $g\colon K^n \to V$ so, dass $g(e_i) = v_i$ ist. Dann ist $g^{-1} \circ f \circ g$ gegeben durch die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.*

(c) *Im Fall $V = K^n$ ist g durch eine Matrix $S \in \mathrm{GL}_n(K)$ gegeben, und die obigen $g(e_i)$ sind die Spalten von S.*

6 Euklidische und unitäre Vektorräume

In diesem ganzen Kapitel sei $\mathbb{K}$ entweder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

6.1 Skalarprodukte

Definition 6.1.1 *Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum. Ein **Skalarprodukt** auf V ist eine Abbildung $V \times V \to \mathbb{K}, (v, w) \mapsto \langle v, w\rangle$, so dass für alle $v, v', w, w' \in V$ und alle $r \in \mathbb{K}$ folgendes gilt:*

(a) *$\langle rv + v', w\rangle = r\langle v, w\rangle + \langle v', w\rangle$ und $\langle v, rw + w'\rangle = \bar{r}\langle v, w\rangle + \langle v, w'\rangle$ (**Sesquilinearität** im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; **Bilinearität** im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).*

(b) *$\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$ (**Hermitezität** im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; **Symmetrie** im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)*

(c) *Ist $v \neq 0$, so ist $\langle v, v\rangle$ eine reelle Zahl größer als 0 (**positive Definitheit**).*

Vorsicht: Die Notation $\langle v, w\rangle$ für das Skalarprodukt sieht (dummerweise) fast genauso aus wie die Notation $\langle v, w\rangle_{\mathbb{K}}$ für das Erzeugnis von v und w (Definition 3.2.5).

Definition 6.1.2 *Ein **euklidischer Vektorraum** ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt; ein **unitärer Vektorraum** ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum zusammen mit einem Skalarprodukt.*

Definition 6.1.3 *Sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum. Die **Norm** eines Vektors $v \in V$ definiert durch $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. (Hierbei ist $\mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Kurzschreibweise für $\{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$.)*

Beispiel 6.1.4 *Wir fassen $\mathbb{R}^n$ als euklidischen Vektorraum und $\mathbb{C}^n$ als unitären Vektorraum auf, indem wir das folgende* ***Standard-Skalarprodukt*** *verwenden:*

$$\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rangle := a_1\bar{b}_1 + \cdots + a_n\bar{b}_n.$$

Die Norm eines Vektors ist dann

$$\| \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \| = \sqrt{|a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}.$$

Mo 27.1.

Satz 6.1.5 *Sei V ein euklidischer bzw. unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum, seien $v, w \in V$ und sei $r \in \mathbb{K}$. Dann gilt:*

(a) $\|v\| = 0 \iff v = 0$
(b) $\|rv\| = |r| \cdot \|v\|$
(c) $|\langle v, w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ *(****Cauchy-Schwarz-Ungleichung****), und Gleichheit gilt genau dann, wenn v und w linear abhängig sind.*
(d) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *(****Dreiecksungleichung****)*

Definition 6.1.6 *Sei $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$.*

(a) *Wir schreiben $\bar{A}$ für die Matrix, die man aus A erhält, indem man alle Einträge komplex konjugiert.*
(b) *Gilt $A^T = A$, so nennt man A* ***symmetrisch****. Gilt $A^T = \bar{A}$, so nennt man A* ***hermitesch****.*
(c) *Eine hermitesche Matrix heißt* ***positiv definit****, wenn für alle $v \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ gilt: $v^T A\bar{v}$ ist eine reelle Zahl größer als 0.*

Satz 6.1.7 (a) *Zu jedem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{K}^n$ existiert genau eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$, so dass*

$$\langle v, w\rangle = v^T A\bar{w}$$

gilt.
(b) *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ entspricht auf die obige Art einem Skalarprodukt genau dann, wenn sie hermitesch und positiv definit ist.*

Mi 29.1.

6.2 Isometrien und Orthonormalbasen

In diesem gesamten Aschnitt sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer oder unitärer $\mathbb{K}$-Vektorraum. Auf $\mathbb{K}^n$ verwenden wir immer das Standard-Skalarprodukt.

Definition 6.2.1 (a) *Seien V und W endlich-dimensionale euklidische oder unitäre Vektorräume. Ein Isomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ heißt* ***Isometrie****, wenn für alle $v, v' \in V$ gilt: $\langle v, v' \rangle = \langle f(v), f(v') \rangle$.*

(b) *Ist $W = V$, so nennt man f auch eine* ***orthogonale Transformation*** *(falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. eine* ***unitäre Transformation*** *(falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).*

(c) *Man nennt eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$* ***orthogonal*** *bzw.* ***unitär****, wenn der entsprechende Endomorphismus von $\mathbb{K}^n$ (mit dem Standard-Skalarprodukt) eine orthogonale bzw. unitäre Transformation ist.*

Bemerkung 6.2.2 *Die orthogonalen bzw. unitären Matrizen bilden eine Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.*

Definition 6.2.3 (a) *Ein Vektor $v \in V$ heißt* ***normiert***[7]*, wenn $\|v\| = 1$.*

(b) *Zwei Vektoren $v, w \in V$ heißen* ***orthogonal*** *zueinander, wenn $\langle v, w \rangle = 0$ ist. Man schreibt $v \perp w$.*

Definition 6.2.4 *Eine* ***Orthonormalbasis*** *von V ist eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *v_i ist normiert für alle i.*

(b) *$v_i \perp v_j$ für alle i, j mit $i \neq j$.*

Beispiel 6.2.5 *Die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ ist eine Orthonormalbasis.*

Bemerkung 6.2.6 *Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von V, so gilt für beliebige Vektoren $v = \sum_i a_i v_i$ und $w = \sum_i b_i v_i$ (mit $a_i, b_i \in \mathbb{K}$): $\langle v, w \rangle = \sum_i a_i \bar{b}_i$.*

Satz 6.2.7 *Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Orthonormalbasis von V und sei $v \in V$. Dann gilt $v = \sum_{i=1}^{n} \langle v, v_i \rangle v_i$.*

Satz 6.2.8 *Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ sind äquivalent:*

(a) *A ist orthogonal bzw. unitär.*

(b) *A ist invertierbar und es gilt $A^T = \bar{A}^{-1}$.*

(c) *Die Spalten von A bilden eine Orthonormalbasis.*

Bemerkung 6.2.9 *Sine $v_1, \ldots, v_k \in V \setminus \{0\}$ paarweise orthogonal zueinander (d. h. $v_i \perp v_j$ für alle $i \neq j$), so sind sie bereits linear unabhängig.*

Satz 6.2.10 (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung) *V besitzt eine Orthonormalbasis. Sind bereits $v_1, \ldots, v_k \in V$ gegeben, die normiert und paarweise orthogonal zueinander sind, so lassen sich $v_1, \ldots, v_k$ zu einer Orthonormalbasis von V ergänzen.*

[7] Nicht verwechseln mit einem „normierten Polynom“.

Korollar 6.2.11 *Ist V ein n-dimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum, so existiert eine Isometrie $g\colon \mathbb{K}^n \to V$ (wobei $\mathbb{K}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt versehen ist).*