7 Die Jordansche Normalform

Ziel: Klassifizieren alle Endomorphismen f eines Vektorraums bis auf Basiswechsel.

Spezialfall: Falls f diag'bar: Nach Basis-Wechsel ist f durch eine Diagonalmatrix gegeben.

7.1 Direkte Summen und Komplemente

Sei K ein Körper.

Def 7.1.1: (a) Seien V und V' K-VR. Wenn wir $V \times V'$ auch als K-VR auffassen wollen, schreiben wir $V \oplus V'$ dafür. Man nennt dies die (äußere) direkte Summe von V und V'.

(b) Ist V ein K-VR und $U, U' \subseteq V$ UVR mit $U \cap U' = \{0\}$, so identifizieren wir $U \oplus U'$ mit $U + U'$, indem wir $(u, u') \in U \oplus U'$ identifizieren mit $u + u'$.

Für UVR $U, U' \subseteq V$ sagt man „$U + U'$ ist eine direkte Summe", wenn $U \cap U' = \{0\}$.
Schreibt man „$U \oplus U'$" statt „$U + U'$", so ist gemeint, dass $U \cap U' = \{0\}$. Man sagt auch, $U \oplus U'$ ist die (innere) direkte Summe von U und U'.

Satz 7.1.2: Sei V ein K-VR und $U_1, \dots, U_n \subseteq V$ UVR.
Sei $(u_{1,j})_{j \in J_1}$ eine Basis von U_1, ..., $(u_{n,j})_{j \in J_n}$ eine Basis von U_n

(a) $V = (\dots((U_1 \oplus U_2) \oplus U_3) \oplus \dots) \oplus U_{n-1}) \oplus U_n$

(b) All die obigen Basen der U_i zusammen bilden eine Basis von V.

(c) Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig schreiben als

$v = u_1 + \ldots + u_n$ mit $u_1 \in U_1, \ldots, u_n \in U_n$.

Bem 7.1.3: Aus dem Satz folgt, dass bei (a) die Klammerung egal ist. Insbesondere schreibe in Zukunft einfach $U_1 \oplus \ldots \oplus U_n$.

Bew-Skizze: (b) $\Leftrightarrow$ (c):

(b) besagt: Jedes $v \in V$ lässt sich eindeutig schreiben als $\sum_{i,j} r_{i,j} \cdot u_{i,j}$

Setze $u_i = \sum_j r_{i,j} u_{i,j}$ (Dann: $v = u_1 + \ldots + u_n$)

(a) $\Rightarrow$ (b) • Fall $n=2$ kam im Beweis von 3.5.3 vor

• Fall $n > 2$:

• $(n=2)$-Fall auf U_1, U_2 anwenden liefert: Basen von U_1 und U_2 bilden zusammen eine Basis von $U_1 \oplus U_2 = W_2$

• $(n=2)$-Fall auf W_2, U_3 anwenden liefert Basis von $W_3 = W_2 \oplus U_3$ etc....

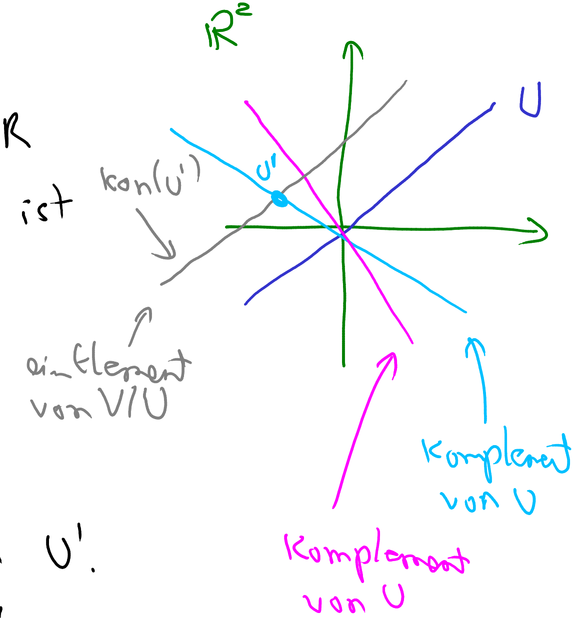
(b) $\Rightarrow$ (a) • Da die $u_{i,j}$ ganz V erzeugen habe

$$V = \underbrace{\underbrace{((U_1 + U_2)}_{W_2} + U_3)}_{W_3} + \ldots +) U_n$$

• Bleibt z.z.: $W_k \cap U_{k+1} = \{0\}$. Wenn $v \in W_k \cap U_{k+1} \setminus \{0\}$ wäre, hätte v zwei verschiedene Darstellungen in der Basis $(u_{i,j})_{i,j}$: Einmal mit $i \leq k$ und einmal mit $i = k+1$. $\square$

Def 7.1.4: Sei V ein K-VR und $U \subseteq V$ ein UVR. Ein <u>Komplement</u> von U (in V) ist ein UVR $U' \subseteq V$, so dass $U \oplus U' = V$ gilt.

Bem 7.1.5: Komplemente existieren immer.



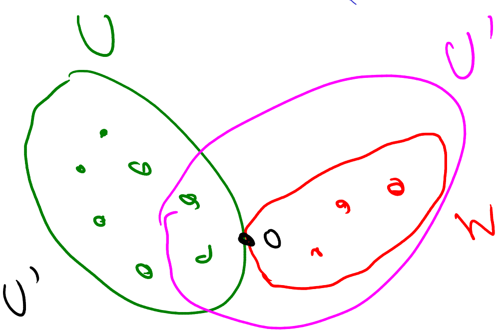
Satz 7.1.6: Ist V ein K-VR, $U \subseteq V$ ein UVR und $U' \subseteq V$ ein Komplement von U, so ist die Abb.
$$U' \longrightarrow V/U$$
$$u' \longmapsto u' + U = \mathrm{kan}(u')$$
ist ein Isomorphismus.

Bew: Wähle Basen $(v_i)_{i\in I}$ von U und $(v_i')_{i\in I'}$ von U'.
$(v_i')_i$ ergänzt $(v_i)_i$ zu einer Basis von V.
Im Bew. von 3.5.8 hatten wir gesehen, dass daraus folgt:
$$\big(\underbrace{\mathrm{kan}(v_i')}_{v_i'+U}\big)_i \text{ ist eine Basis von } V/U$$
Die obige Abb. bildet also eine Basis von U' auf eine Basis von V/U ab und ist damit ein Isomorphismus. $\square$

Satz 7.1.7: Sei V ein K-VR und seien $U, U' \subseteq V$ UVR.
Dann gilt: (1) $\dim(U+U') = \dim(U) + \dim(U') - \dim(U \cap U')$
Genauer gilt: (2) Ist $(v_i)_{i\in I}$ eine Basis von U und $(v_j')_{j\in J}$ eine Basis eines Komplements von $U \cap U'$ in U', so bilden $(v_i)_{i\in I}$ und $(v_j')_{j\in J}$ zusammen eine Basis von $U+U'$.

d.h. $W \subseteq U'$ s.d. $(U \cap U') \oplus W = U'$ (*)

Bew: (2) • Sei W das Komplement von $U \cap U'$ in U'.



• Nach 7.1.2 ist zu zeigen:
$$U \oplus W = U + U'$$
Dazu zu zeigen: (i) $U + W = U + U'$
(ii) $U \cap W = \{0\}$

(i) zu zeigen: $U' \subseteq U + W$. Habe $U \cap U' \subseteq U + W$ und $W \subseteq U + W$
$$\Rightarrow U' = (U \cap U') + W \overset{(*)}{\subseteq} U + W$$

(ii) $U \cap W \subseteq U'$ (da $W \subseteq U'$)

Also: $U \cap W = (U \cap U') \cap W \overset{(*)}{=} \{0\}$

(1) $\dim(U + U') = \dim U + \underbrace{\dim W}_{\overset{(*)}{=}\ \dim U' - \dim(U \cap U')}$ $\square$