7.2 Nilpotente Endomorphismen

K Körper, V endl-dim K-VR.

Def 7.2.1: Ein Endomorphismus $f \in End(V)$ heißt <u>nilpotent</u>, wenn ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\underbrace{f^k}_{f \circ \ldots \circ f \circ f,\ k\text{-mal}} = 0$ ist. Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt nilpotent, wenn sie als Endomorphismus von K^n nilpotent ist (d.h. $\underbrace{A^k}_{A \cdot A \cdots A,\ k\text{-Mal}} = 0$). Das kleinste k, so dass $f^k = 0$ bzw $A^k = 0$ ist, nennt man den <u>Nilpotenzgrad</u> von f bzw. A.

Bsp: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Nilpot mit Nilpotenzgrad 2.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Satz 7.2.2: Sei $f \in End(V)$ nilpotent vom Nilpotenzgrad k. Setze $U_\ell := \ker(f^\ell)$ und $W_\ell := im(f^\ell)$. Dann gilt:

(i) $\{0\} = U_0 \subsetneq U_1 \subsetneq U_2 \subsetneq \ldots \subsetneq U_k = V$

(ii) $V = W_0 \supsetneq W_1 \supsetneq \ldots \ldots \supsetneq W_k = \{0\}$

Bew: (i)(a) $\{0\} = U_0$, $U_k = V$: klar

(b) $U_i \subseteq U_{i+1}$: $\quad v \in U_i \Rightarrow f^i(v) = 0 \Rightarrow f(\underbrace{f^i(v)}_{= f^{i+1}(v)}) = 0$

$\Rightarrow v \in U_{i+1}$

(c) <u>$U_{k-1} \neq U_k$</u>: Wenn $U_{k-1} = V$ wär, wär $\ker(f^{k-1}) = V$, also $f^{k-1} = 0$. Widerspruch zu: Nilpot-Grad $= k$.

Mache jetzt Induktion: Zeige: Aus $U_i \neq U_{i+1}$ folgt $U_{i-1} \neq U_i$

Annahme $U_{i-1} = U_i$, also $\ker f^{i-1} = \ker f^i$

Für $v \in V$ gilt:

$$
\begin{aligned}
v \in U_i &\iff f^i(v) = 0 \\
&\iff f(v) \in \ker f^{i-1} \\
&\qquad\qquad\quad \shortparallel \\
&\qquad\qquad\quad \ker f^i \\
&\iff v \in \ker f^{i+1} \iff v \in U_{i+1}
\end{aligned}
$$

Also habe $U_i = U_{i+1}$ ↯ zu: $U_i \neq U_{i+1}$

(ii) $V = W_0 \supseteq W_1 \supseteq \dots \supseteq W_k = \{0\}$: Analog zu (a), (b) und leicht.

$W_i \neq W_{i+1}$: Geht analog zu (c), oder verwende:

(*) $\quad \dim W_i = \dim \operatorname{im} f^i = \operatorname{rk} f^i = \dim V - \dim \ker f^i = \dim V - \dim U_i$

Aus $U_i \subsetneq U_{i+1}$ folgt $\dim U_i < \dim U_{i+1}$

Aus (*) folgt also $\dim W_i > \dim W_{i+1}$, also $W_i \neq W_{i+1}$. $\square$

Satz 7.2.3: Sind $A, B \in K^{n \times n}$ ähnliche Matrizen, d.h. $B = S^{-1} A S$, für $S \in GL_n(K)$, so gilt

$$
\begin{array}{ccc}
\operatorname{rk} A^l & = & \operatorname{rk} B^l \\
\shortparallel & & \shortparallel \\
\dim \operatorname{im} A^l & = & \dim \operatorname{im} B^l \\
\dim \ker A^l & = & \dim \ker B^l
\end{array}
$$

Insbes. ist A nilpot gdw B nilpot. ist, und A und B haben den gleichen Nilpotenzgrad.

Bew: $B^l = S^{-1} A \cancel{S} \cancel{S^{-1}} A \cancel{S} \cdots \cancel{S^{-1}} A S = S^{-1} A^l S$

Da S, S^{-1} inv'bar folgt der Satz. $\square$

Satz 7.2.4 (Jordansche Normalform für nilpotente Endomorphismen):

Ist $f \in \operatorname{End}(V)$ nilpotent, so existiert ein Isomorphismus $g: K^n \longrightarrow V$ $(n = \dim V)$, so dass die Matrix von $g^{-1} \circ f \circ g$ die folgende Form hat:

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[r, "g"] \arrow[d] & V \arrow[d, "f"] \\
K^n \arrow[r, "g"] & V
\end{tikzcd}
$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 \; 1 \\ & & & 0 \end{matrix}}_{\,r_1 \times r_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 \; 1 \\ & & & 0 \end{matrix}}_{\,r_\ell \times r_\ell} \end{pmatrix}$$

„Jordansche Normalform von f"

Diese Blöcke nennt man Jordan-Blöcke.

für $r_1, \dots, r_\ell \geq 1$.

Die $r_1, \dots, r_\ell$ sind durch f bis auf Reihenfolge eindeutig bestimmt.

<u>Bem.:</u> • Sei $e_1, \dots, e_n$ die Std-Basis von K^n. Dann

$A e_1 = 0$. $A e_2 = e_1$ $A e_3 = e_2$, ... $A e_{r_1} = e_{r-1}$

$A e_{r_1+1} = 0$ ...

Also kürzer

$$A: \begin{cases} e_{r_1} \longmapsto \dots \dots \; e_3 \longmapsto e_2 \longmapsto e_1 \longmapsto 0 \\ \quad e_{r_1+r_2} \longmapsto \dots \dots \; e_{r_1+2} \longmapsto e_{r_1+1} \longmapsto 0 \\ \qquad \vdots \end{cases}$$

• Sei $v_i := g(e_i)$. Dann

$$f: \left.\begin{cases} v_{r_1} \longmapsto \dots \dots \; v_3 \longmapsto v_2 \longmapsto v_1 \longmapsto 0 \\ \qquad \vdots \end{cases}\right\} (*)$$

Also: 7.2.4 ist äquiv. zu: Ex Basis $(v_i)_i$ von V, so dass $(*)$ gilt.

<u>Bem 7.2.5:</u> In 7.2.4 ist der Nilpotenzgrad von f gleich $\max\{r_1, \dots, r_\ell\}$.

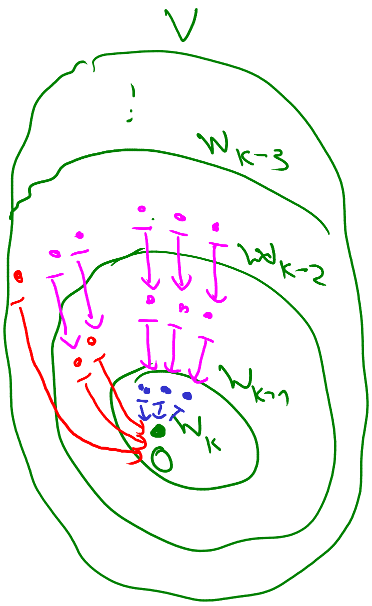
Insbesondere ist er $\leq n$.

$\dim \operatorname{im} f = n - \ell = \operatorname{rk} f$

$\dim \ker f = n - \dim \operatorname{im} f = n - (n - \ell) = \ell$

Bew von 7.2.4: Existenz von g:

Sei k der Nilpot-Grad von f, und sei $W_m := \operatorname{im} f^m$



$$V = W_0 \supset W_1 \supset W_2 \supset \dots \supset W_{k-1} \supset W_k = \{0\}$$

Plan:
- Wähle eine Basis von W_{k-1}
- Ergänze zu einer Basis von W_{k-2}

  ⋮
- Ergänze zu einer Basis von $W_0 = V$
- Achte in jedem Schritt darauf, dass die Basis (*) erfüllt.

- Für W_{k-1} wähle einfach eine beliebige Basis.
- Bleibt zu tun:

  Nehme an, wir haben schon eine (*)-Basis von W_{m+1}; möchte die zu einer (*)-Basis von W_m ergänzen.
- Sei also

$$\begin{array}{l} v_{1,1} \mapsto v_{1,2} \mapsto v_{1,3} \mapsto \dots \mapsto v_{1,r_1} \mapsto 0 \\ v_{2,1} \mapsto v_{2,2} \mapsto \dots \mapsto v_{2,r_2} \mapsto 0 \\ \vdots \\ v_{p,1} \mapsto v_{p,2} \mapsto \dots \mapsto v_{p,r_p} \mapsto 0 \end{array}$$

eine (*)-Basis von W_{m+1}.
- Um dies zu einer Basis von W_m zu ergänzen, gehe wie folgt vor:

  (1) Wähle beliebige Urbilder $v_{1,0}, \dots v_{p,0} \in W_m$ von $v_{1,1}, \dots, v_{p,1}$ unter f.

  Solche Urbilder existieren, da $f(W_m) = W_{m+1}$

  (2) Zeige, dass $(v_{ij})_{1 \le i \le p,\, 0 \le j \le r_p}$ l.u. sind.

To do:

1

Setze $W' := \langle v_{i,j} \mid 1 \le i \le \mu, 0 \le j \le r_\mu \rangle_K$

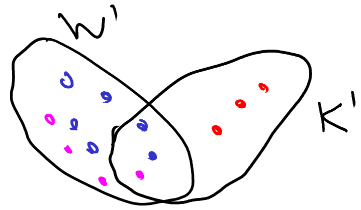
(3) Ergänze das durch $w_1, \dots, w_{\mu'}$ zu einer Basis von W_m, und zwar so, dass $\underbrace{f(w_i) = 0 \quad \forall i}$ also: $w_i \in K$

Um zu sehen, dass das möglich ist, zeige:

② $W' + K' = W_m$, wobei $K' := \ker f \cap W_m$.

$$
\begin{array}{l}
v_{1,0} \mapsto v_{1,1} \mapsto v_{1,2} \mapsto v_{1,3} \mapsto \dots \mapsto v_{1,r_1} \mapsto 0 \\
v_{2,0} \mapsto v_{2,1} \mapsto v_{2,2} \mapsto \dots \mapsto v_{2,r_2} \mapsto 0 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \\
v_{\mu,0} \mapsto v_{\mu,1} \mapsto v_{\mu,2} \mapsto \dots \mapsto v_{\mu,r_\mu} \mapsto 0 \\
w_1 \mapsto 0 \\
\vdots \\
w_{\mu'} \mapsto 0
\end{array}
$$

- Bem.: $W' \cap K'$ ist i.A. $\neq \{0\}$. Sondern: Wähle $w_1, \dots, w_{\mu'}$ als Basis eines Komplements von $W' \cap K'$ in K'.



① $(v_{i,j})_{1 \le i \le \mu, 0 \le j \le r_\mu}$ ist l.u.:

Ann: $\sum_{i,j} r_{i,j} v_{i,j} = 0$, nicht alle $r_{i,j} = 0$

d.h. Basisvektoren von W_{m+1}

Da die blauen Vektoren l.u. sind, muss i_0 existieren, s.d. $r_{i_0,0} \neq 0$.

Habe $f\left(\sum_{i,j} r_{i,j} v_{i,j}\right) = 0$

$$
\begin{array}{c}
\| \\
\sum_{i,j} r_{i,j} \underbrace{f(v_{i,j})}
\end{array}
$$

„blau"

$$
= \begin{cases} v_{i,j+1} & \text{falls } j < r_i \\ 0 & \text{falls } j = r_i \end{cases}
$$

Das ist eine lin. Komb der blauen Vektoren
Der Koeff vor $v_{i_0,1}$ ist $r_{i_0,0}$, also $\neq 0$, also ist dies eine (nicht-triviale) lin. Abhängigkeit der blauen Vektoren. $\lightning$ zu: blaue Vektoren sind l. u.

② $\underline{W' + K' = W_m}$:

$$W' = \left\langle \begin{matrix} v_{1,0} \mapsto v_{1,1} \mapsto v_{1,2} \mapsto v_{1,3} \mapsto \dots \mapsto v_{1,r_1} \\ v_{2,0} \mapsto v_{2,1} \mapsto v_{2,2} \mapsto \dots \mapsto v_{2,r_2} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ v_{\mu,0} \mapsto v_{\mu,1} \mapsto v_{\mu,2} \mapsto \dots \mapsto v_{\mu,r_\mu} \end{matrix} \right\rangle_K$$

$$K' := \ker f \cap W_m = \ker(f|_{W_m})$$

- (1) $\dim(K' \cap W') = \dim \ker f|_{W'} = \mu$ nach Bem 7.2.5 (angewandt auf $f|_{W'}$)
- $\dim W_m - \dim \underbrace{\ker(f|_{W_m})}_{K'} = \operatorname{rk}(f|_{W_m}) = \dim \underbrace{\operatorname{im}(f|_{W_m})}_{W_{m+1}}$

Also: (2) $\dim W_m = \dim K' + \dim W_{m+1}$
- (3) $\dim W' = \dim W_{m+1} + \mu$ (da μ neue rosa Basis-Vektoren)
- Erhalte: $\dim W_m \overset{(3)}{=} \dim K' + \underbrace{\dim W_{m+1}}_{\overset{(2)}{=} \dim W' - \mu}$

$$= \dim K' + \dim W' - \dim(K' \cap W')$$

$$\dim(W' + K') = \dim W' + \dim K' - \dim(W' \cap K')$$

$\boxed{\text{Satz 7.1.7}}$

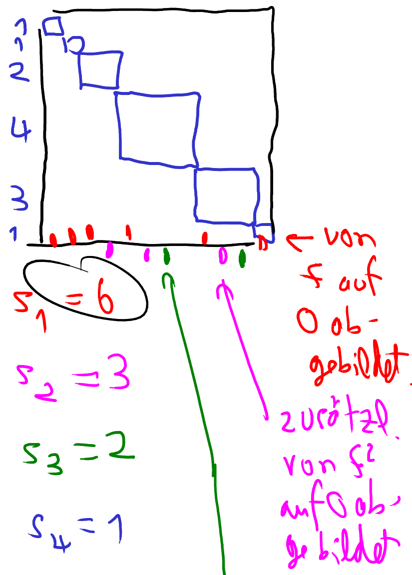
$\boxed{\text{Für beliebige UVR } U, U' \subseteq V \text{ gilt: } \dim(U + U') = \dim U + \dim U' - \dim(U \cap U')}$

Also: $\dim(W' + K') = \dim W_m$
$\Rightarrow W' + K' = W_m$

Eindeutigkeit der $r_1, \dots, r_\ell$ (bis auf Reihenfolge):

- Sei $U_k := \ker(f^k)$. Beh: Die r_j lassen sich aus den $\dim U_k$ berechnen.
- Sei s_i die Anzahl der Blöcke $\geq i$, also: $s_i := \#\{j \mid r_j \geq i\}$
  Es reicht, die s_i aus $\dim U_k$ bestimmen zu können.
- $\dim U_1 = \dim \ker f = \#$ Blöcke $= s_1$
- Ein Block der Größe r entspricht Basisvektoren $v_1, \dots, v_r$ mit
  $$v_r \overset{f}{\longmapsto} v_{r-1} \longmapsto v_{r-2} \longmapsto \dots \overset{f}{\longmapsto} v_2 \overset{f}{\longmapsto} v_1 \overset{f}{\longmapsto} 0$$
- $\dim U_2 = s_1 + s_2$
- Allgemein: $\dim U_k = s_1 + s_2 + \dots + s_k$
- Also: $\dim U_k - \dim U_{k-1}$
  $$= s_1 + \dots + s_{k-1} + s_k - (s_1 + \dots + s_{k-1}) = s_k$$

Bsp:



$s_1 = 6$

$s_2 = 3$

$s_3 = 2$

$s_4 = 1$

$s_5 = 0$

$\square$

Korollar 7.2.6: Ist $f \in \operatorname{End}(V)$ nilpotent ($\dim V = n$), so ist
$$\chi_f(x) = \det(f - x \cdot \mathrm{id}_V) = (-x)^n$$
Insbesondere ist 0 der einzige EW von f.

Bew: Nach 7.2.4 können wir annehmen, dass f durch die Matrix in Jordanscher Normalform gegeben. Also

$$\chi_f(x) = \det \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -x & 1 \\ 0 & -x \end{matrix}} & & & 0 \\ & \boxed{\begin{matrix} -x & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & -x \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{\begin{matrix} -x & 1 \\ 0 & -x \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

Nach Kor 5.1.7. ist diese Determinante gleich $(-x)^n$.

Lemma 7.2.7: Ist $f \in \operatorname{End}(V)$ nilpotent und $\lambda \in K^\times$, so ist $f + \lambda \cdot \mathrm{id}_V$ invertierbar.

Bew: Betrachte $g := \frac{1}{-\lambda} \cdot (f + \lambda \cdot id_V)$. Es reicht zu zeigen: g inv'bar.

$$= \underbrace{\frac{1}{-\lambda} \cdot f}_{\text{nilpotent.}} - id_V$$

Es reicht also z.z.: f nilpot $\Rightarrow f - id_V$ inv'bar.

Beh: $h := -(f^0 + f^1 + f^2 + \ldots + f^{k-1})$ ist das Inverse von $f - id_V$, wobei k der Nilpot-Grad von f ist.

Bew: $h \circ (f - id_V) = -(f^0 + \ldots + f^{k-1}) \circ (f - id_V)$

$$-(\underbrace{f^0 \circ f}_{\cancel{f^1}} + \underbrace{f^1 \circ f}_{\cancel{f^2}} + \cancel{\ldots} + \underbrace{f^{k-1} \circ f}_{f^k}) + (f^0 + \cancel{f^1} + \cancel{\ldots} + \cancel{f^{k-1}})$$

$$= \underbrace{-f^k}_{= 0} + \underbrace{f^0}_{= id_V}$$

Analog: $(f - id_V) \circ h = id_V$ $\square$