8.5 Die universelle Eigenschaft des Quotientenvektorraums

Satz 8.5.1: Sind V, W K-VR, $U \subseteq V$ ein UVR, $\mathrm{kan}: V \to V/U$ die kanonische Abb., so habe eine Bijektion

$$\mathrm{Hom}(V/U, W) \longrightarrow \{\tilde{g} \in \mathrm{Hom}(V,W) \mid U \subseteq \ker \tilde{g}\}$$
$$g \longmapsto g \circ \mathrm{kan}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\mathrm{kan}"'] \arrow[dr] & \\ V/U \arrow[r, "g"'] & W \end{tikzcd}$$

Anders ausgedrückt: Jedes $\tilde{g} \in \mathrm{Hom}(V,W)$ mit $U \subseteq \ker \tilde{g}$ lässt sich als $g \circ \mathrm{kan}$ schreiben für ein eindeutiges g.

Def 8.5.2: Dies nennt man die <u>universelle Eigenschaft des Quotientenvektorraums</u>

Bem 8.5.3: Durch diese univ. Eig wird $(V/U, \mathrm{kan})$ eindeutig bis auf eindeutigen Isomorphismus festgelegt: Ist (V', f') ein weiteres Paar mit dieser univ. Eig.,

so ex. genau ein Iso. $h: V/U \to V'$ s.d.

d.h.

$$\mathrm{Hom}(V', W) \longrightarrow \{\tilde{g} \in \mathrm{Hom}(V,W) \mid U \subseteq \ker \tilde{g}\}$$
$$g \longmapsto g \circ f'$$

ist eine Bijektion

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\mathrm{kan}"'] \arrow[dr, "f'"] & \\ V/U \arrow[r, "h"'] & V' \end{tikzcd}$$

Ausflug in die Kategorientheorie

Vektorraumkonstruktionen

	Gegeben	Erhalte	Gegeben	Erhalte
Dualraum K-VR → K-VR	V VR	V^* VR	$f \in \mathrm{Hom}(V,W)$	$f^* \in \mathrm{Hom}(W^*,V^*)$
			$f, g \rightsquigarrow$	$f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$
Skal.-Er. K-VR → L-VR	V K-VR	V_L L-VR	$f \in \mathrm{Hom}(V,W)$	$f_L \in \mathrm{Hom}(V_L, W_L)$
			$f, g \xrightarrow{\text{K-VR}}$	$f_L \circ g_L = (f \circ g)_L$
$\otimes$ (K-VR) x (K-VR) → K-VR	V, V' VR	$V \otimes V'$	$f \in \mathrm{Hom}(V,W)$, $f' \in \mathrm{Hom}(V',W')$	$f \otimes f' \in \mathrm{Hom}(V \otimes V', W \otimes W')$
			$f, f', g, g' \rightsquigarrow$	$(f \otimes f') \circ (g \otimes g')$ $= (f \circ g) \otimes (f' \circ g')$

Kategorie = „Menge von Strukturen und zugehörige Homomorphismen"

Bsp: • K-VR = Kategorie der K-Vektorräume mit lin. Abb.

• Die Kategorie der Mengen mit (beliebigen) Abb. dazwischen.

• Gruppen

• Ringe

• Körper

Funktor = „Abb. zwischen Kategorien, die die hellblaue Bedingung erfüllt"