Aufgabe:

Gram-Schmidt-Orthogonalisierung

Im $\mathbb{R}^3$

Gegeben: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Wende Gram-Schmidt-Verfahren an.

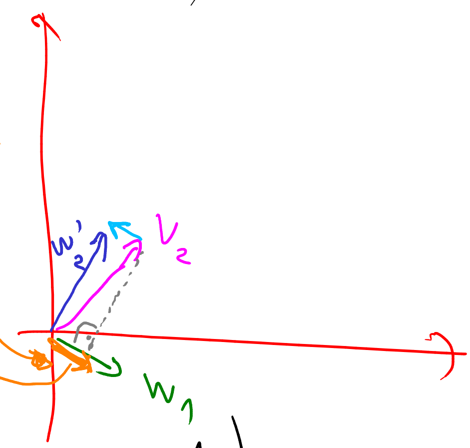
Lsg:

$$w_1 := \frac{1}{\|v_1\|} \cdot v_1 = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2' := v_2 - \langle v_2, w_1 \rangle \cdot w_1$$

dieser Vektor

$\|w_1\| \cdot$ diese Länge



$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

NR: $\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}}{2} = \sqrt{\frac{2}{4 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{1}{6}}$

$$w_2 = \frac{1}{\|w_2'\|} \cdot w_2'$$

$$= \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}}_{\sqrt{\frac{2}{3}}}} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

$$w_3' := v_3 - \langle v_3, w_1 \rangle \cdot w_1 - \langle v_3, w_2 \rangle w_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdots \end{pmatrix} \right\rangle}_{=0} w_1 - \underbrace{\underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \right\rangle}_{\sqrt{\frac{2}{3}}} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{18}} \\ \sqrt{\frac{2}{18}} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{18}} \\ -\sqrt{\frac{2}{18}} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad w_3 = \frac{1}{\|w_3'\|} w_3'$$

Aufg: Sei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

Gesucht: v_2, v_3 s.d. $v_2 \perp v_1$ $\quad v_3 \perp v_1$ $\quad v_3 \perp v_2$

Lsg: $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad v_3 = \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 \perp v_2$

$$v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 \perp v_1$$

einfach mal festgelegt

$$v_3 = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \langle v_1, v_3 \rangle = \underbrace{1 \cdot x + 2 + 0}_{\text{soll } = 0 \text{ sein. Wähle dafür } x = -2}$$

Bsp. für ein nicht-Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^2$:

Frage: Ist

$$\langle v, w\rangle = v^T \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix}}_{A} w$$

ein Skal-Prod?

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} = \bar{A}$$

Ist A positiv definit??

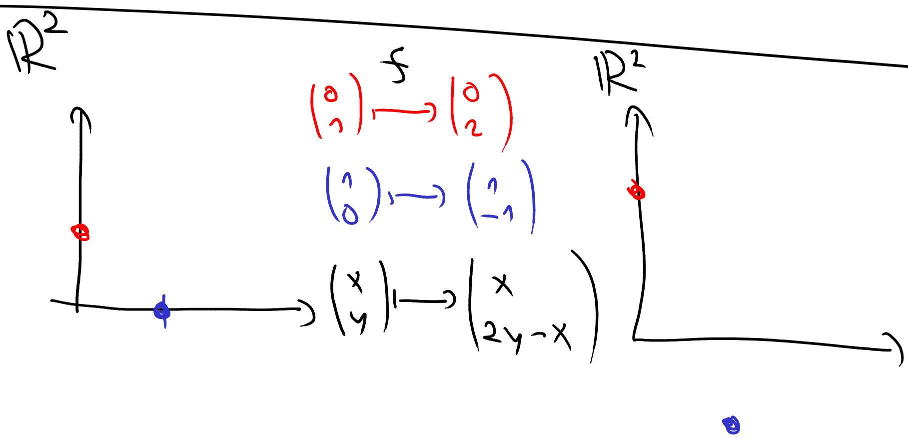
$$(x \quad y)\begin{pmatrix} 3 & -i \\ i & 2 \end{pmatrix} \cdot \overline{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = 3x\bar{x} \underbrace{-ix\bar{y}}_{a-ib} + \underbrace{i\bar{x}y}_{a+ib} + 2y\bar{y}$$

$$= 3|x|^2 + 2\,\mathrm{Re}(i\cdot\bar{x}\cdot y) + 2\cdot|y|^2$$

Antwort im Tutorium vom 26.4.

??

$$\overline{-ix\bar{y}} = \overline{-i}\,\bar{x}y = i\bar{x}y$$



$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 2y-x \end{pmatrix}$$

$$\langle v, w\rangle = (f(v))^T f(w)$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle = (v_1 \quad 2v_2 - v_1) \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ 2w_2 - w_1 \end{pmatrix} = v_1 w_1$$

$$+ (2v_2 - v_1)\cdot(2w_2 - w_1)$$

$$= v_1w_1 + 4v_2w_2 - 2v_2w_1 - 2v_1w_2 + v_1w_1$$

$$= 2v_1w_1 + 4v_2w_2 - 2v_2w_1 - 2v_1w_2$$

$$= (v_1 \quad v_1)\cdot\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

Blatt 1, Aufg. 2: Gesucht: Matrix A, ...

s.d. $(2\ 1)\cdot A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=0$

Aufg: $\underbrace{A\in\mathbb{R}^{n\times n} \text{ orthogonale Matrix}}_{\text{d.h. } \langle v,w\rangle=\langle Av,Aw\rangle}$. Z.z: $\det A\in\{\pm1\}$

Lsg:

$$\langle v,w\rangle=\langle Av,Aw\rangle$$

$$\Updownarrow\ 6.3.3$$

$$A^T=A^{-1}$$

$$\det(A^T)=\det(A^{-1})$$

$$\det(A)=\det(A^T),\quad \det(A^{-1})=\frac{1}{\det A}\quad\Rightarrow(\det A)^2=1$$

$$\Downarrow$$

$$\det A=\pm1$$

6.4.5 Für $\mathbb{R}^n$: Geg. $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. Gesucht $B\in\mathbb{R}^{n\times n}$ s.d.

$$\langle Av,w\rangle=\langle v,Bw\rangle$$

$$\langle Av,w\rangle=(Av)^Tw=v^TA^Tw,\qquad \langle v,Bw\rangle=v^TBw$$

... Also $B=A^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \beta(v,w) := v^T A w$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

ist Bilinearform (egal, was A ist)

$$\Downarrow$$

$$2 v_1 w_1 + 3 v_1 w_2 + 1 \cdot v_2 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_2 + v_3 w_3$$

Symmetrisch? Nein, da A nicht symmetrisch:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 3 \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 1$$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \beta'(v,w) := v^T A' w \quad \text{ist symmetrisch.}$$

6.4.4 in dieser Situation: Gesucht: $f \in End(\mathbb{R}^3)$ s.d.:

$$\beta'(v,w) = \langle v, f(w) \rangle = v^T \cdot f(w)$$

Nimm für f den Endomorphismus, der durch A' gegeben ist.

Bsp zu 6.4.5: $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

gegeben durch $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

$\det(A) = \det(\bar{A})$

Was ist die Matrix B zu f^*?

Wollen: $$\underbrace{v^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} w}_{\langle v, f(w) \rangle} \stackrel{?}{=} (Bv)^T w = v^T B^T w$$

$$\langle v, f(w) \rangle = \langle f^*(v), w \rangle$$

$\boxed{\text{Also: } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.}$