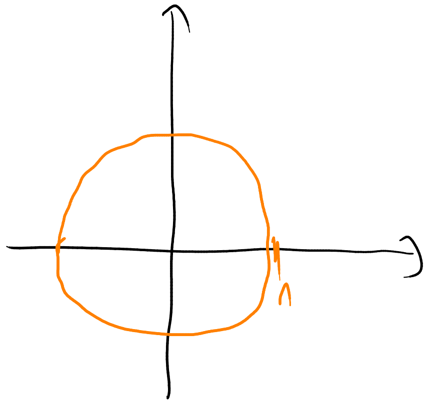
Quadriken in $\mathbb{R}^n$

• $x^2+y^2=1$

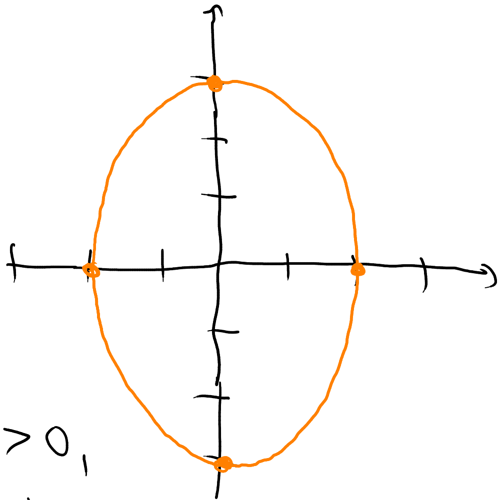


• $x^2+y^2=r^2$

⇝ Kreis mit Radius r

$$\frac{1}{r^2}x^2+\frac{1}{r^2}\cdot y^2=1$$

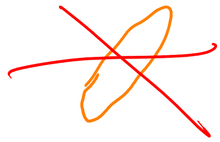
• $\frac{1}{2^2}\cdot x^2+\frac{1}{3^2}\cdot y^2=1$



• **Allgemein:**

$ax^2+by^2=c$, für $a,b,c>0$,
hat als Lsg-Menge eine Ellipse,
die „waagerecht oder senkrecht steht":



• $\underbrace{5x^2-6xy+5y^2}_{=q(x,y)=\beta\left(\binom{x}{y},\binom{x}{y}\right)}=4$

$\langle v, Aw\rangle$

$\|$

Std-Skal-Prod auf $\mathbb{R}^2$

$$\beta(v,w)=v^T\cdot\begin{pmatrix}5&-\frac{6}{2}\\-\frac{6}{2}&5\end{pmatrix}\cdot w$$

$$\| \quad (x\ \ y)\begin{pmatrix}5&-\frac{6}{2}\\-\frac{6}{2}&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=5\cdot x^2-\frac{6}{2}xy-\frac{6}{2}yx+5y^2$$

• Wende auf dieses β Satz 6.6.6 an, um $v_1,v_2\in\mathbb{R}^2$ zu finden, die eine ONB bilden und so dass gilt: $\beta(v_1,v_2)=0$

• v_1,v_2 sind EV von $\begin{pmatrix}5&-3\\-3&5\end{pmatrix}=:A$

• $\chi_A=\det\begin{pmatrix}5-x&-3\\-3&5-x\end{pmatrix}=(5-x)^2-(-3)^2=x^2-10x+25-9$

$= x^2 - 10x + 16$

NST davon: $\dfrac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 16}}{2} = 5 \pm \dfrac{\sqrt{36}}{2} = 5 \pm 3$

Also: EW sind 2 und 8

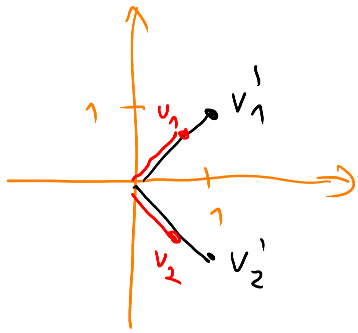
- Bestimme zugehörige EV: .... rechnen ..... erhalte

EW 2: $v_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ EW 8: $v_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Probe: $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$

- Um ONB zu erhalten, normiere diese Vektoren:

$v_1 := \dfrac{1}{\|v_1'\|} \cdot v_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$



- Probe: $v_1 \perp v_2$?

zu symmetrischen Matrizen existiert ONB aus EV.

$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot (-1) = 0$

- Probe: $\beta(v_1, v_2) \overset{?}{=} 0$ (*)

$\shortparallel$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (5 - 3 + 3 - 5) = 0$

Zurück zur Frage: Lsg-Menge von $\beta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 4$?

$\shortparallel$

$5x^2 - 6xy + 5y^2$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \cdot v_1 + b \cdot v_2 = S \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Neue Frage: $M := \{ (a,b) \mid \overbrace{\beta(a \cdot v_1 + b \cdot v_2, a \cdot v_1 + b \cdot v_2)}^{q(S \cdot \binom{a}{b})} = 4 \}$

$\shortparallel$

$a^2 \beta(v_1, v_1) + \underbrace{ab\, \beta(v_1, v_2) + ba\, \beta(v_2, v_1)}_{=0 \text{ nach } (*)} + b^2 \beta(v_2, v_2)$

$$B(v_1,v_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot(5-3-3+5) = 2$$

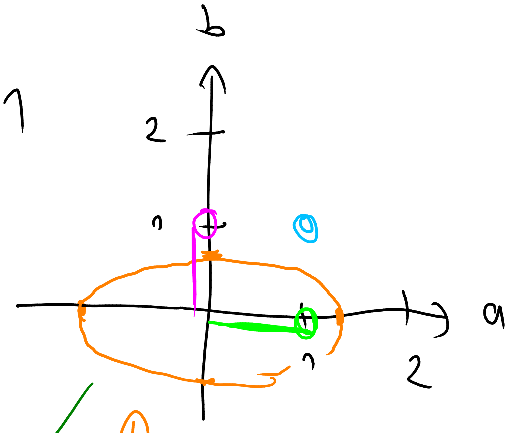
$$B(v_2,v_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(5+3+3+5) = 8$$

$$M = \{(a,b) \mid \underbrace{a^2\cdot 2 + b^2\cdot 8 = 4}_{\Updownarrow}\}$$

$$\frac{a^2}{2} + 2b^2 = 1$$

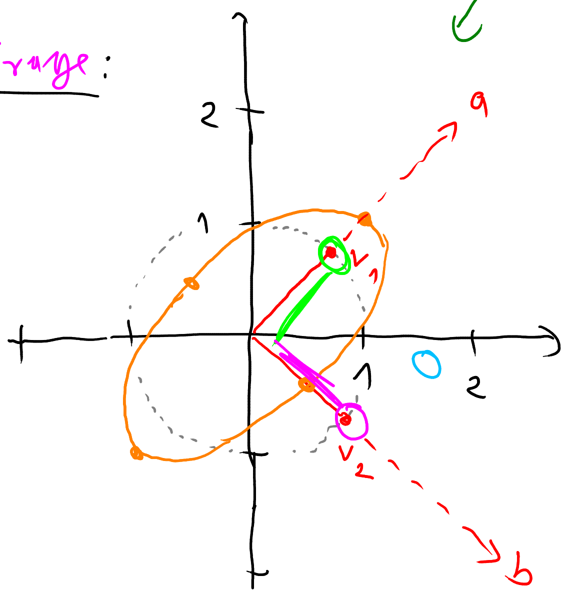
$$\parallel$$

$$\frac{a^2}{(\sqrt{2})^2} + \frac{b^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$$



Antwort auf „neue Frage"

Antwort auf Frage:

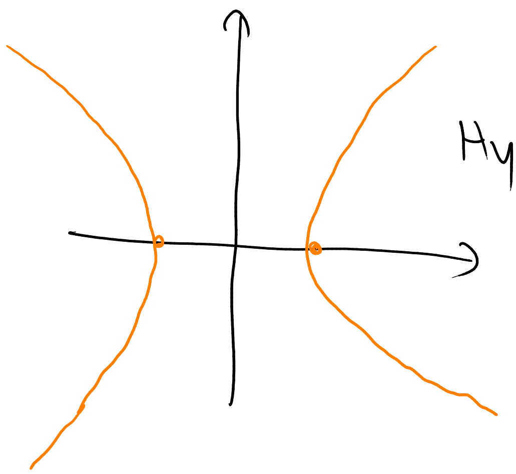


$$S = (v_1 \mid v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$S\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = a v_1 + b v_2$$

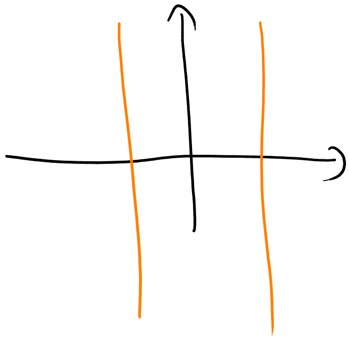
Spalten von S sind ONB $\Rightarrow$ S ist orthogonale Transformation $\Rightarrow$ erhält Längen und Winkel

- Lsg von $x^2 - y^2 = 1$



Hyperbel

- Lsg von $x^2 + 0y^2 = 1$



Doppellinie

- Lsg von $-x^2 - y^2 = 1$:
  hat keine Lsg.

Ganz allgemein erhalte als Lsg-Menge einer Gleichung der Form
$$ax^2 + bxy + cy^2 = d$$
immer eine Ellipse oder Hyperbel oder Doppellinie oder $\emptyset$, aber vllt gedreht.

Lsg-Menge einer Gleichung der Form $\underbrace{ax^2 + bxy + cy^2}_{q(x,y)} + dx + ey + f = 0$ (a)

Wende Hauptachsentransformation auf q an.
Ex. $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal, so dass $q\left(S\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}\right) = a'(x')^2 + c'(y')^2$
für geeignete a', c'.

Wende S auf die ganze Gleichung (a) an. Erhalte auf diese Art eine neue Gleichung der Form $a'(x')^2 + c'(y')^2 + d'x' + e'y' + f = 0$

Falls $a' \neq 0$: $x' := x'' - \frac{1}{2}\frac{d'}{a'}$

$$a'\left(x'' - \frac{1}{2}\frac{d'}{a'}\right)^2 + \dots d'\left(x'' - \frac{1}{2}\frac{d'}{a'}\right) + \dots = 0$$

$$a'\left((x'')^2 - x''\cdot\frac{d'}{a'} + \frac{1}{4}\left(\frac{d'}{a'}\right)^2\right) + \dots$$

$-x''\cdot d'$ $\qquad$ $+d'\cdot x''$

Werde also durch so eine Verschiebung das $d'x'$ los.

Analog: Falls $c' \neq 0$ werde $c'y'$ los.

Insgesamt: Nach Drehung und Verschiebung habe eine Gleichung der Form:

- $ax^2 + cy^2 + f = 0$ $\qquad a, c \neq 0$
- $cy^2 + dx + f = 0$ $\qquad c \neq 0$
- $dx + ey + f = 0$

Lsg ist 0 oder $\asymp$ oder $||$ oder $\emptyset$

Lsg ist $\cup$

Lsg ist $/$

$$x^2 = y$$

$$y^2 = 3x + 7 + yx$$

$$\rightsquigarrow$$

$$x^4 = 3x + 7 + x^3$$