Aufgabe: Bestimme das Inverse von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nachträgliche Korrektur:
In der Matrix C hatte das $(-1)^{k+l}$ gefehlt.
Jetzt ist das in Orange.

$$C = \begin{pmatrix} -2 & +13 & -8 \\ -1 & -1 & -4 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = -2 - 12 - 1 = -15$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -3 \\ +13 & -1 & -3 \\ -8 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufg.: Bestimme eindeutige Lsg von $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$

$$x_1 = -\frac{1}{15} \cdot \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \dots$$

$$x_2 = -\frac{1}{15} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \cdot (-7) = \frac{7}{15}$$

$$x_3 = -\frac{1}{15} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \dots$$

Aus dem Beweis von 8.1.7:

Ann: $(v_i)_{i \in J}$ sind lin. abh.

d.h. ex. $r_i \in K$: $\sum_{i \in J} r_i v_i = 0$ ... und fast alle $r_i = 0$

nach Def. von lin. Abhängigkeit

In $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: $v_0 = (1, 0, 0, 0, \dots)$
$v_1 = (0, 1, 0, 0, \dots)$
$v_2 = (0, 0, 1, 0, \dots)$
$\vdots$
$w = (1, 1, 1, 1, \dots)$

Bei uns nicht erlaubt.

$1 \cdot v_0 + 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots + (-1) \cdot w = 0$ „unendliche lineare Abhängigkeit"

Das würde man nicht eine lin. Abhängigkeit nennen.

Grund: $\boxed{\text{Im Allgemeinen ist nicht klar, was die Summe von unendlich vielen Vektoren sein soll!}}$

Bsp: $v_0 = (1, 0, 0, 0, \dots)$
$v_1 = (-2, 0, 0, 0, \dots)$
$v_2 = (3, 0, 0, 0, \dots)$
$v_3 = (-4, 0, 0, 0, \dots)$

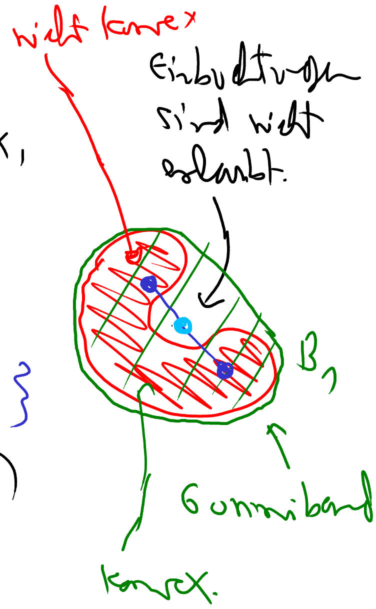
$\sum_i 1 \cdot v_i = ???$

Dieses Bsp soll zeigen: Es ist überhaupt nicht so klar, was unendl. Summen sein sollen.

Bsp: Anwendung des Zornschen Lemmas

Def: Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt konvex, wenn für alle $b_1, b_2 \in A$ gilt:
$[b_1, b_2] \subseteq A$.

$$[b_1,b_2] = \{c \in \mathbb{R}^n \mid \|b_1 - c\| + \|b_2 - c\| = \|b_1 - b_2\|\}$$
$$d(b_1,c) + d(b_2,c) = d(b_1,b_2)$$



Satz: Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge.
Dann existiert (1) eine minimale konvexe Teilmenge $B_1 \subseteq \mathbb{R}^n$, die A enthält, d.h. $A \subseteq B_1$

(2) eine maximale konvexe Teilmenge $B_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, die in A enthalten ist, d.h. $B_2 \subseteq A$.

„Gummibandmenge"
$$= \bigcup_{b_1,b_2 \in A} [b_1, b_2]$$

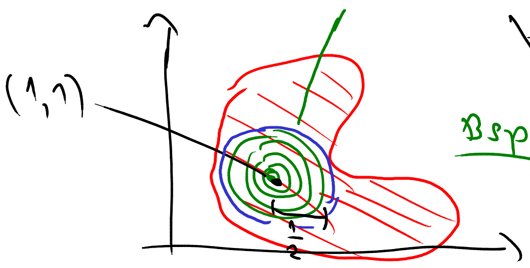
Bew (2): Sei M die Menge aller konvexen Teilmengen von A, mit „$\subseteq$" als partieller Ordnung.

Anschauung: Um eine max. konvexe TM zu finden: Nimm irgendeine konvexe TM. Falls nicht maximal: Vergrößere sie so lange, bis sie maximal ist.

$C, C' \in M$
$C' \subseteq C$

Formal: Benutze Zornsches Lemma. Zeige dazu:

- $M \neq \emptyset$: z.B. $\emptyset \in M$
- Ist $M' \subseteq M$ eine Kette, so existiert $\overbrace{C \subseteq A,\ C \text{ konvex}}^{C \in M}$ mit:
  $\forall B \in M' : B \subseteq C$



Bsp: $M' = \{\underbrace{B((1,1),r)}_{= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-(1,1)\| \le r\}} \mid r \in [0, \frac{1}{2})\}$

$C = B((1,1), \frac{1}{2})$

- Wähle $C = \bigcup_{B \in M'} B$. Prüfe:
  - $C \subseteq A$: ✓
  - C konvex?

Sei $c_1, c_2 \in C$: $[c_1, c_2] \subseteq C$?

$$\begin{array}{cc} c_1 & c_2 \\ \cap & \cap \\ B_1 & B_2 \\ \cap & \cap \\ M' & \end{array}$$

Da M' Kette habe $\underbrace{B_1 \subseteq B_2}_{\Downarrow}$ oder $\underbrace{\text{umgekehrt}}_{\Downarrow}$

$c_1, c_2 \in B_2$ $\qquad$ analog

$\Downarrow$

$[c_1, c_2] \subseteq B_2 \subseteq C$.

- Wie kann man Vektorräume mit bestimmten Eigenschaften konstruieren?
  Konstruiere die VR auf geeignete Weise mit den bekannten Mitteln.

Bsp.: Aufgabe: Seien V_1, V_2, W Vektorräume.

(i) Zeige: Die lin. Abb. von W nach $V_1 \times V_2$ entsprechen Paaren von lin. Abb. (f_1, f_2), $f_i \in \mathrm{Hom}(W, V_i)$

$$\mathrm{Hom}(W, V_1 \times V_2) \xrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}(W, V_1) \times \mathrm{Hom}(W, V_2)$$

$$f \longmapsto (f_1, f_2)$$

$$f(w) = (\underset{V_1}{v_1}, \underset{V_2}{v_2}) \qquad f_1(w) := v_1, \quad f_2(w) := v_2$$

Formaler: $\pi_1 : V_1 \times V_2 \to V_1$ $\qquad f_i(w) = \pi_i(f(w))$.

$\pi_2 : V_1 \times V_2 \to V_2$

$$f \longleftarrow (f_1, f_2)$$

$$f(w) = (f_1(w), f_2(w)).$$

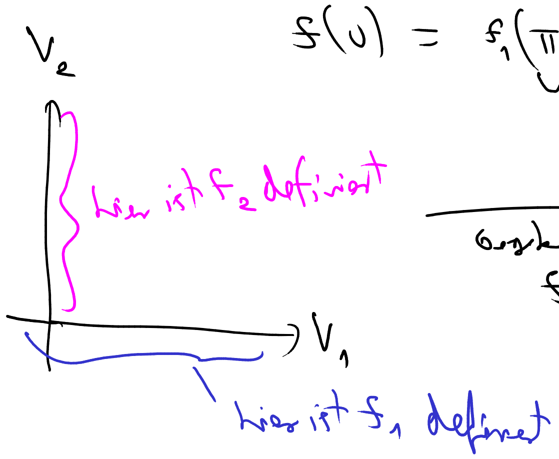
(ii) Gesucht: VR U, so dass eine naheliegende Bijektion existiert:

$$\mathrm{Hom}(U, W) \xrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}(V_1, W) \times \mathrm{Hom}(V_2, W)$$

<u>Beh:</u> $U = V_1 \times V_2$ tut's.

$$f : U \to W \quad \longleftarrow\!\!\mid \quad \underset{\text{Gegeben}}{(f_1, f_2)} \in \mathrm{Hom}(V_1, W) \times \mathrm{Hom}(V_2, W)$$

$$f(u) = f_1(\underbrace{\pi_1(u)}_{\in V_1}) + f_2(\pi_2(u))$$



Gegeben:

$$f : U \to W \quad \longmapsto \quad \begin{pmatrix} f_1(v_1) = f((v_1, 0)) \\ f_2(v_2) = f((0, v_2)) \end{pmatrix}$$

<u>Tipp zu Blatt 8, Aufg. 4(i)</u>

Auf Blatt 7 kam ein VR vor, der eine Basis hat, die in natürlicher Weise in Bij zu $\mathbb{N}$ ist.