Bsp für Elemente von $\prod_{i\in I} V_i$ und $\bigoplus_{i\in I} V_i$

$I = \mathbb{N}$

$V_i = \mathbb{R}^{i+2}$

$$\prod_{i\in I} V_i \ni (v_0, v_1, v_2, \dots) \qquad v_0 \in \mathbb{R}^2,\ v_1 \in \mathbb{R}^3,\ v_2 \in \mathbb{R}^4 \dots$$

$$\left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}, \dots \right)$$

$$\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \dots \right) \notin \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} V_i$$

$$\left(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}, \underset{\substack{\| \\ 0}}{\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}}, 0, 0, 0, \dots \right) \in \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} V_i$$

Beispiele zum Dualraum und zur dualen Abb.

$V = \mathbb{R}^4$ $\qquad$ $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}) = V^*$

Bsp. für ein Element von V^*:

$$\alpha : \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \longmapsto 3x_1 - 2x_3 + x_4$$

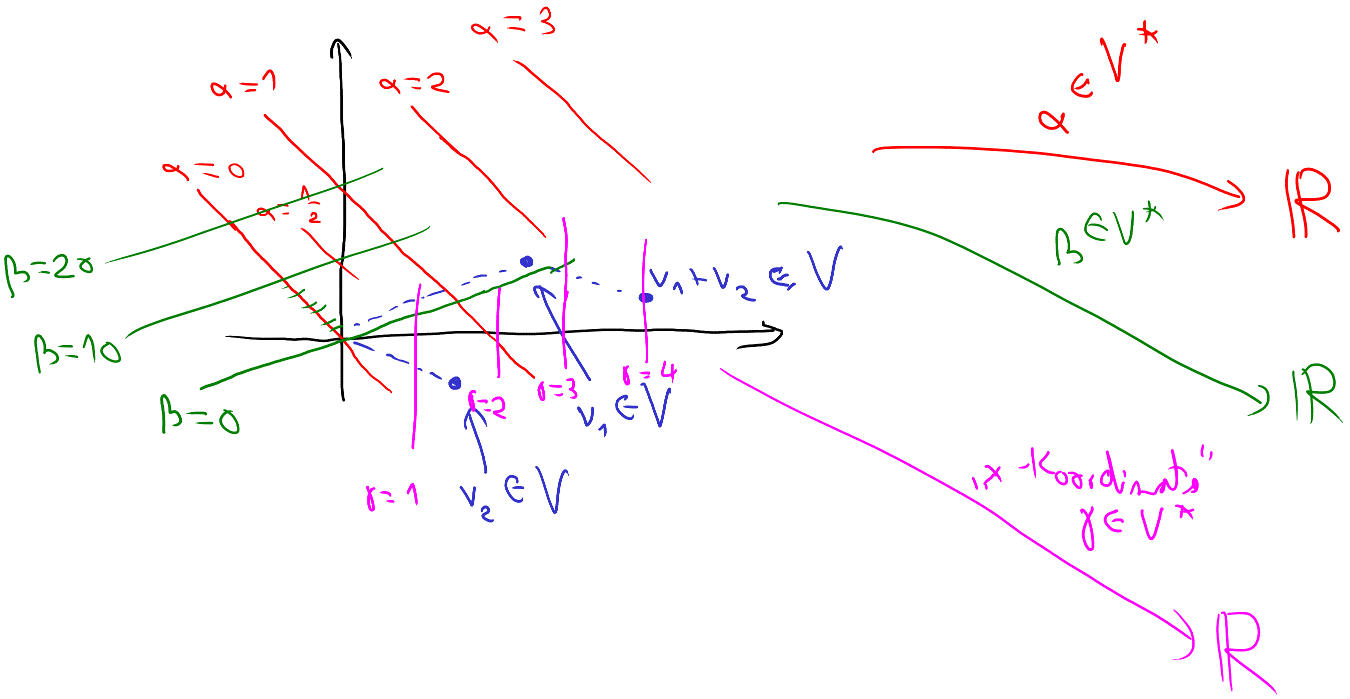
Als Matrix $\alpha = \begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 4}$

$v \in \mathbb{R}^4$, Bsp $\rightarrow v = \begin{pmatrix}2\\2\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\alpha(v) = 3\cdot 2 - 2\cdot 0 + 1\cdot 1 = 7$$

$$= \begin{pmatrix}3 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$

Bsp: V := Menge der Punkte in der Ebene



Bsp für duale Abb:

$U = \mathbb{R}^4 \qquad V = \mathbb{R}^2$

Bsp: $f : U \to V, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

f ist surjektiv, nicht injektiv

$f^* : (\mathbb{R}^2)^* \longrightarrow (\mathbb{R}^4)^*$

$\quad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$\quad \alpha \longmapsto \underbrace{\alpha \circ f}_{\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}}$

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

f^* ist injektiv ✓, nicht surjektiv ✓

Bsp.: $\alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = 3x_1 - 5x_2$

Dann: $f^*(\alpha) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \alpha\left(f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}\right)\right) = \alpha\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 3 \cdot x_1 - 5(x_2 + x_3)$$

Matrixschreibweise:

$f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f^*(\alpha)$

$\shortparallel$

$\alpha = (y_1 \;\; y_2) \qquad \alpha \circ f = (y_1 \;\; y_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$= (y_1 \;\; y_2 \;\; y_2 \;\; 0)$

$\alpha = (3 \;\; -5) \qquad f^*(\alpha) = (3 \;\; -5 \;\; -5 \;\; 0)$

Erinnerung: Für lineare Abb:
f inj $\Leftrightarrow$ nur 0 wird auf 0 abgebildet

Aufg: Sei $U=\mathbb{R}^4$, $V=\mathbb{R}^2$. Existiert ein $f\in \mathrm{Hom}(\underset{\mathbb{R}^4}{U},\underset{\mathbb{R}^2}{V})$, so dass f^* die folgende Abb. ist: $h:(\mathbb{R}^2)^* \longrightarrow (\mathbb{R}^4)^*$

$$\underset{\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}}{\alpha} \longmapsto \underbrace{\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\mapsto \alpha\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)-\alpha\left(\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}\right)\right)}_{\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}}$$

$$(y_1\ y_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

und wenn ja, was ist dieses f?

$$h\big(\overbrace{(y_1\ \ y_2)}^{\alpha}\big) = (y_1\ \ \ y_2-y_1\ \ \ 0\ \ \ -y_2)$$

$$= (y_1\ \ y_2)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$(y_1\ \ \ y_2-y_1\ \ \ 0\ \ \ -y_2)$$

$$y_1x_1+y_2x_2-y_1x_2-y_2x_4 = y_1\cdot x_1+(y_2-y_1)x_2-y_2\cdot x_4$$

Wir wollen also:

$$f^*(\alpha) = \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\mapsto \alpha\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)-\alpha\left(\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}\right)\right)$$

$$f^*(\alpha) = \alpha\circ f$$

$h:(1\ 0)\longmapsto(1\ \ -1\ \ 0\ \ 0)$

$h:(0\ 1)\longmapsto(0\ \ 1\ \ 0\ \ -1)$

1. Versuch: $f_1\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ $\qquad \alpha\circ f_1: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\longmapsto \alpha\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)$

2. Versuch: $f_2\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right)=-\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}$ $\qquad \alpha\circ f_2: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\longmapsto -\alpha\left(\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}\right)$

Letzter Versuch: $f=f_1+f_2$, d.h.

$$f\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_2-x_4\end{pmatrix} \qquad \alpha\circ f: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\longmapsto \alpha\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_2-x_4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}-\alpha\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}$$

sollte die Matrix von f sein

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_2-x_4\end{pmatrix}$$

V VR. Ein homogenes LGS $\qquad \alpha_1(x)=0 \qquad \alpha_i\in V^*$, $x\in V$

$$\vdots$$

$$\alpha_k(x)=0$$

Lösungen davon: $\{v\in V \mid \alpha_1(v)=0,\dots,\alpha_k(v)=0\}$

$$= \{v\in V \mid \forall \alpha\in U:\ \alpha(v)=0\}$$

$U\subseteq V^*$ UVR, $U = \langle\alpha_1,\dots,\alpha_k\rangle_K$

In diesem Sinne ist ein homogenes LGS in V gegeben durch einen UVR von V^*.