Lineare Algebra 2 – Blatt 1

Abgabe bis 22.4.2025, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (4 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $f \in \operatorname{End}(V)$. Zeigen Sie:

(a) $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} f^*$.

(b) f und f^* haben die gleichen Eigenwerte.

Genauer: Lösen Sie die beiden Teilaufgaben zunächst in dem Fall, dass $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt ist. Erklären Sie dann präzise, wie man daraus (mit Hilfe von Korollar 6.2.11) die entsprechenen Aussagen für beliebige V erhält.

Aufgabe 2 (1+2 für sinnvolle Bearbeitung):

Im Folgenden verwenden wir auf $\mathbb{R}^2$ das Skalarprodukt $\langle v, w\rangle := v^T \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} w$.

(a) Bestimmen Sie das orthogonale Komplement $U^\perp$ von $U = \{\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(b) Sei $f \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Matrix zu f^*.

Aufgabe 3 (4 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei V ein unitärer $\mathbb{C}$-Vektorraum. Für Endomorphismen $f, g \in \operatorname{End}(V)$ erhält man das Adjungierte der Verküpfung $f \circ g$ aus den Adjungierten von f und g, aber wie: $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$ oder $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$? Zeigen Sie die eine der Formeln und geben Sie ein Gegenbeispiel zur anderen an.

Aufgabe 4 (1+1+1+1+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum der stetigen Funktionen vom Intervall $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}$ (mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation).

(a) Sei V die Menge der stetigen Funktionen vom Intervall $[0, 1]$ nach $\mathbb{R}$. Überprüfen Sie kurz, dass V mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$$

ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

(c) Sei $U := \{f \in V \mid f(0) = 0\}$. Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

(d) Zeigen Sie, dass das orthogonale Komplement $U^\perp$ trivial ist, d. h. nur aus der 0-Funktion besteht.
Hinweis: Für $f \in V$ beliebig ist die Funktion $g(x) := x \cdot f(x)$ in U. Zeigen Sie, dass $\langle f, g\rangle \neq 0$ ist falls $f \neq 0$ ist.

(e) Zeigen Sie, dass $(U^\perp)^\perp$ echt größer als U ist.

Aufgabe 5 (4 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei V ein n-dimensionaler euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform. Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) Der Endomorphismus f aus Satz 6.4.4, so dass $\beta(v, w) = \langle v, f(w)\rangle$ gilt, ist invertierbar.

(ii) Für jede Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V gilt: Die Matrix $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, die gegeben ist durch $a_{ij} = \beta(v_i, v_j)$, ist invertierbar.

(iii) Zu jeder linearen Abbildung $g\colon V \to \mathbb{R}$ existiert ein Vektor $v \in V$, so dass für alle $w \in V$ gilt: $g(w) = \beta(v, w)$.

(iv) Zu jedem $v \in V \setminus \{0\}$ existiert ein $w \in V$, so dass $\beta(v, w) \neq 0$ ist.

Anmerkung: Wenn die obigen Bedingungen gelten, nennt man die Bilinearform β nicht-entartet.