Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau
SoSe 2025

Lineare Algebra 2 – Blatt 10

Abgabe bis 23.6.2025, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (2+1+1 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum.

(a) Zeigen Sie: Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum, $U' := \{\alpha \in V^* \mid \alpha(U) = \{0\}\}$ und $U'' := \{v \in V \mid \forall \alpha \in U' \colon \alpha(v) = 0\}$, so gilt $U'' = U$.

(b) Sei nun $U \subseteq V^*$ ein Untervektorraum des Dualraums, $U' := \{v \in V \mid \forall \alpha \in U \colon \alpha(v) = 0\}$ und $U'' := \{\alpha \in V^* \mid \alpha(U') = \{0\}\}$.
Zeigen Sie, dass $U'' = U$ gilt falls V endlich-dimensional ist.

(c) Geben Sie ein Gegenbeispiel zu der Aussage aus (b) an, wenn V unendlich-dimensional ist.
Hinweis: Sie können $V = K^{\oplus \mathbb{N}}$ (wie in Beispiel 8.1.14) wählen. Können Sie einen echten Untervektorraum $U \subsetneq V^*$ finden, so dass $U' = \{0\}$ ist?

Aufgabe 2 (2+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Wir betrachten die Basis $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ von $\mathbb{R}^3$.

(a) Geben Sie die zugehörige duale Basis von $(\mathbb{R}^3)^*$ an. (Fassen Sie $(\mathbb{R}^3)^*$ als 1×3-Matrizen auf.)

(b) Benutzen Sie jetzt Bemerkung 8.2.12, um den Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ in der obigen Basis auszudrücken.

Aufgabe 3 (1+1+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein Körper, seien V und W K-Vektorräume und sei $f \colon V \to W$ ein Isomorphismus.

(a) Zeigen Sie, dass dann auch $f^* \colon W^* \to V^*$ ein Isomorphismus ist. (Verwenden Sie einen Satz aus der Vorlesung, aus dem das leicht folgt.)

(b) Sei nun $g \colon V^* \to W^*$ das Inverse von f^*. Zeigen Sie, dass für $v \in V$ und $\alpha \in V^*$ gilt: $\alpha(v) = (g(\alpha))(f(v))$.

(c) Wenn $W = V$ ist und f die Multiplikation mit einem Element $a \in K^\times$, was ist dann die Abbildung g?

Aufgabe 4 (1+1+1+1+1+1+1+1+1+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ist $v \in V$, so schreiben wir im folgenden $\langle v, \cdot \rangle$ für die Abbildung, die einen Vektor $w \in V$ abbildet auf das Skalarprodukt $\langle v, w \rangle$.

(a) Zeigen Sie, dass $\langle v, \cdot \rangle$ ein Element von V^* ist. (Welche Eigenschaft des Skalarprodukts wird dafür benötigt?)

Sei ab jetzt $f \colon V \to V^*$ die Abbildung, die v auf $\langle v, \cdot \rangle$ abbildet.

(b) Wie sieht f konkret aus wenn $V = \mathbb{R}^n$ ist und wir mit dem Standard-Skalarprodukt arbeiten? (Identifizieren Sie V^* mit $\mathbb{R}^{1 \times n}$.)

(c) Zeigen Sie, dass f linear ist. (Aus welche Eigenschaft des Skalarprodukts folgt das?)

(d) Sei $v_1, \ldots, v_n \in V$ eine Orthonormalbasis. Zeigen Sie, dass $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ die dazu duale Basis ist.

(e) In wiefern besagen Satz 6.2.7 und Bemerkung 8.2.12 in dieser Situation das gleiche?

(f) Folgern Sie aus (d): Jedes Element von V^* lässt sich auf eindeutige Weise in der Form $\langle v, \cdot \rangle$ scheiben (für $v \in V$).

(g) Sei nun $g \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus und sei $g^* \in \mathrm{End}(V^*)$ die dazu duale Abbildung. Was ist $g^*(\langle v, \cdot \rangle)$, für $v \in V$?
Anmerkung: Mir fallen zwei naheliegende Antworten ein: Es könnte $\langle gv, \cdot \rangle$ sein oder es könnte die Abbildung $w \mapsto \langle v, gw \rangle$ sein. Nur eins davon ist richtig. Welches?

(h) Die Abbildung $w \mapsto \langle v, gw \rangle$ ist ein Element von V^* und lässt sich also nach (f) schreiben als $\langle v', \cdot \rangle$ für ein geeignetes $v' \in V$. Was ist dieses v'? (Unter Verwendung einer Definition aus Abschnitt 6.4 lässt sich v' leicht mit Hilfe von v und g ausdrücken.)

(i) Folgern Sie: $g^*(f(v)) = f(g^*(v))$. In wiefern macht diese Behauptung überhaupt Sinn?
(Damit Sie dies folgern können, müssen sie (g) und (h) richtig beantwortet haben. Sie können (i) auch als Hinweis verstehen, was die richtigen Antworten auf (g) und (h) sein sollten.)

(j) Wie sieht die Behauptung aus (i) aus, wenn wir f benutzten, um V mit V^* zu identifizieren (d. h. wenn wir so tun, als wäre $V = V^*$ und $f(v) = v$)?