Lineare Algebra 2 – Blatt 11

Abgabe bis 30.6.2025, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei K ein Körper und seien U, V und W K-Vektorräume. Ziel dieser Aufgabe ist es zu prüfen, dass ein „naheliegender" Isomorphismus $h\colon \operatorname{Bil}(U \times V, W) \to \operatorname{Hom}(U, \operatorname{Hom}(V, W))$ existiert. („Naheliegend" soll insbesondere bedeuten, dass h nicht von irgendwelchen Wahlen von Vektoren abhängt.)

(a) Wir ignorieren zunächst, dass U, V und W Vektorräume sind (und fassen sie nur als Mengen auf). Geben Sie eine „naheliegende" Bijektion $h\colon \operatorname{Abb}(U \times V, W) \to \operatorname{Abb}(U, \operatorname{Abb}(V, W))$ an, und geben Sie auch die entsprechende inverse Abbildung h^{-1} an.

(b) Damit das h aus (a) den gewünschten Isomorphismus liefert, sind einige Linearitäts- und Bilinearitäts-Bedingungen zu prüfen. Machen Sie eine vollständige Liste all dieser Bedinungen. (Sie brauchen die Bedingungen dann nicht zu beweisen.)

Hinweis: Dies ist eine Verallgemeinerung von Aufgabe 4 von Blatt 2. Sie können also von dort Ideen kopieren.

Aufgabe 2 (2+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^2)^*$.

(a) Geben Sie Vektoren $v_2 \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha_1 \in (\mathbb{R}^2)^*$ an, so dass v_1, v_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist und α_1, α_2 die zugehörige duale Basis.

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es bei (a), v_2 zu wählen, und wie viele Möglichkeiten gibt es danach (d. h. nachdem v_2 festgelegt wurde), α_1 zu wählen?

Aufgabe 3 (1+1+1+1+1+1+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein Körper, seien V und W K-Vektorräume und seien $v \in V$, $w \in W$, Welche der folgenden Ausdrücke machen Sinn? Und bei den Ausdrücken, die Sinn machen: In welchem Raum liegt der Wert des Ausdrucks?

(a) $(f(v))(w)$, für $f \in \operatorname{Hom}(V, W^*)$

(b) $(f(v))(w)$, für $f \in \operatorname{Hom}(V^*, W)$

(c) $f \circ g^*$, für $f \in \operatorname{Hom}(V^*, W^*)$ und $g \in \operatorname{Hom}(V, W)$

(d) $(f(v))(w)$, für $f \in \operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}(V, V), \operatorname{Hom}(W, W))$

(e) $(f(\mathrm{id}_V))(\mathrm{id}_W)$, für $f \in \operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}(V, V), \operatorname{Hom}(W, W))$

(f) $(f(\mathrm{id}_V))(w)$, für $f \in \operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}(V, V), \operatorname{Hom}(W, W))$

(g) $\alpha \circ \beta$ für $\beta \in \operatorname{Bil}(W \times W, V)$ und $\alpha \in V^*$

Aufgabe 4 (1+1+1+1+1+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und W ein m-dimensionaler K-Vektoraum.

In dieser Aufgabe wollen wir uns überlegen, dass man aus dem kartesischen Produkt einer Basis von V^* und einer Basis von W auf natürliche Weise eine Basis von $\operatorname{Hom}(V, W)$ erhält.

Für $w \in W$ und $\alpha \in V^*$ definieren wir $f_{w,\alpha} \in \operatorname{Hom}(V, W)$ durch $f_{w,\alpha}(v) := \alpha(v) \cdot w$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $W \times V^* \to \operatorname{Hom}(V, W), (w, \alpha) \mapsto f_{w,\alpha}$ bilinear ist.

(b) Wir nehmen in dieser Teilaufgabe an, dass $V = K^n$ und $W = K^m$ ist und betrachten die Standardbasis $e_1, \dots, e_m$ von W und die Standard-Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ von $V^* = K^{1 \times n}$. Wie sieht die Matrix f_{e_i,α_j} aus?

(c) Zeigen Sie (wieder für allgemeinere V und W): Ist $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ eine Basis von V^* und $w_1, \dots, w_m$ eine Basis von W, so bilden die Abbildungen f_{w_i,α_j} (für $1 \le i \le m$ und $1 \le j \le n$) eine Basis von $\operatorname{Hom}(V, W)$.

(d) Wie lässt sich Lemma 8.3.6 auf die Aussage aus (c) anwenden? Was besagt die Eigenschaft (*) aus Satz 8.3.5 in diesem Fall?

(e) Welchen Rang kann eine Abbildung der Form $f_{w,\alpha}$ haben (für $w \in W, \alpha \in V^*$)?

(f) Zeigen Sie: Jede Abbildung $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$, die einen Rang wie in der Lösung von (d) hat, lässt sich auch tatsächlich als $f = f_{w,\alpha}$ schreiben (für $w \in W, \alpha \in V^*$).