Lineare Algebra 2 – Blatt 12

Abgabe bis 7.7.2025, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (1+3 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei K ein Körper, seien V_1 und V_2 K-Vektorräume, und seien $v_1, v_1' \in V_1$ und $v_2, v_2' \in V_2$.

(a) In der Vorlesung wurde gezeigt: $v_1 \otimes 0 = 0$ und $0 \otimes v_2 = 0$. Zeigen Sie nun auch die Rückrichtung, nämlich: $v_1 \otimes v_2 = 0$ genau dann, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist.

(b) Wir nehmen nun an, dass v_1, v_2, v_1', v_2' alle ungleich 0 sind. Zeigen Sie: $v_1 \otimes v_2 = v_1' \otimes v_2'$ gilt genau dann, wenn ein $r \in K^\times$ existiert, so dass $v_1' = rv_1$ und $v_2' = \frac{1}{r} v_2$ gilt.
Hinweis: Ein möglicher Ansatz für die Richtung „$\Rightarrow$" besteht darin, Basen von V_1 und V_2 zu wählen, die die Vektoren v_1 und v_2 enthalten und dann die Vektoren v_1' und v_2' in diesen Basen auszudrücken.

Aufgabe 2 (1+1+1+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Seien $m, n \geq 1$. Wir identifizieren $K^{m\times n} = \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ wie in Beispiel 8.3.12 mit $(K^n)^* \otimes K^m$. Außerdem identifizieren wir $(K^n)^*$ mit $K^{1\times n}$.

(a) In der Vorlesung wurde behauptet, dass mit diesen Identifikationen $\alpha \otimes w$ einfach das Matrixprodukt $w \cdot \alpha$ ist, für $\alpha \in K^{1\times n}$ und $w \in K^m$. Prüfen Sie, dass dies mit Beispiel 8.3.12 zusammen passt.

Wir wollen jetzt die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von möglichst wenig Tensoren der Form $\alpha_i \otimes w_i$ schreiben (für $\alpha_i \in (K^n)^*$, $w_i \in K^m$). Geben Sie solche „minimalen" Ausdrücke für A an...

(b) ...ohne weitere Bedingung an die α_i, w_i.

(c) ...wenn für die α_i nur Standard-Basis-Vektoren von $(K^n)^*$ erlaubt sind.

(d) ...wenn außerdem für die w_i nur Standard-Basis-Vektoren von K^m erlaubt sind.

Aufgabe 3 (2+2 für sinnvolle Bearbeitung):

(a) Wir betrachten auf $\mathbb{R}^2$ das Sklarprodukt $\langle v, w\rangle := v^T \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} w$. Das ist insbesondere eine Bilinearform, d. h. laut Beispiel 8.3.14 sollte es einem Element $\alpha \in (\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2)^*$ entsprechen. Geben Sie $\alpha(e_i \otimes e_j)$ an, für $i, j \in \{1, 2\}$ (wobei $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ die Standardbasis ist).

(b) Wir benutzen nun Beispiel 8.3.11, um $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{R}^{2\times 2}$ zu identifizieren. Geben Sie $\alpha(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix})$ an.

Aufgabe 4 (2+2+2 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein Körper und seien V, W_1, W_2 K-Vektorräume. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass

$$V \otimes (W_1 \oplus W_2) = (V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2) \qquad (\Delta)$$

ist, mit der Identifikation, die gegeben ist durch $v \otimes (w_1, w_2) = (v \otimes w_1, v \otimes w_2)$ für $v \in V$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$.

Um dies zu erhalten, wollen wir zeigen, dass die rechte Seite von (Δ) das Kriterium erfüllt, die das Tensorprodukt auf der linken Seite von (Δ) definiert. Gehen Sie wie folgt vor.

(a) Das Tensorprodukt-Kriterium beinhaltet eine bilineare Abbildung β. Von wo nach wo muss β gehen, und was muss β erfüllen, damit wir die oben angegebene Identifikation (mit $v \otimes (w_1, w_2) = (v \otimes w_1, v \otimes w_2)$) erhalten?

(b) Zeigen Sie, dass eine solche bilineare Abbildung β tatsächlich existiert.

(c) Verwenden Sie Bemerkung 8.3.10 (b), um den Beweis von (Δ) fertig zu machen.

Aufgabe 5 (2 für sinnvolle Bearbeitung):

Zeigen Sie: Ist K ein Körper und sind V_1, V_2, V_3, W K-Vektorräume, so existiert zu jeder multilinearen Abbildung $\gamma\colon V_1 \times V_2 \times V_3 \to W$ genau eine lineare Abbildung $g\colon V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \to W$, so dass $\gamma(v_1, v_2, v_3) = g(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3)$ gilt, für $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v_3 \in V_3$.

Sie können die folgende Aussage verwenden, die wir im Beweis von 8.3.19 gesehen hatten: Ist $B_i \subseteq V_i$ eine Basis für $i = 1, 2, 3$, so ist $\{v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \mid v_1 \in B_1, v_2 \in B_2, v_3 \in B_3\}$ eine Basis von $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$.