

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum.

- (a) Zeigen Sie, dass genau eine lineare Abbildung $s: \text{End}(V) \rightarrow K$ existiert mit der folgenden Eigenschaft: Ist $\alpha \in V^*$, $v \in V$ und $f_{v,\alpha}: V \rightarrow V, v' \mapsto \alpha(v') \cdot v$ (wie in Blatt 11, Aufgabe 4), so ist $s(f_{v,\alpha}) = \alpha(v)$.
Hinweis: Identifizieren Sie $\text{End}(V)$ mit $V^* \otimes V$.
- (b) Sei nun $V = K^n$ und sei $f \in \text{End}(V)$ gegeben durch eine Matrix $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$. Geben Sie an, wie man $s(f)$ aus den a_{ij} erhält. (Man nennt dies die *Spur* der Matrix A .)
Hinweis: Da s linear ist, reicht es, s auf der Standardbasis von $K^{n \times n}$ zu bestimmen.

Aufgabe 2 (3 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Sei V ein $\mathbb{R}$ -Vektorraum und sei $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ die Skalarerweiterung nach $\mathbb{C}$ von V . Wir fassen wie in Definition 8.3.32 V als Teilmenge von $V_{\mathbb{C}}$ auf. Zeigen Sie, dass für Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ gilt:

Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind linear unabhängig über $\mathbb{R}$ (als Vektoren im $\mathbb{R}$ -Vektorraum V) genau dann, wenn sie linear unabhängig über $\mathbb{C}$ (als Vektoren im $\mathbb{C}$ -Vektorraum $V_{\mathbb{C}}$) sind. Formulieren Sie dazu zunächst die Aussage präziser, indem Sie verwenden, mit welchen Vektoren aus $V_{\mathbb{C}}$ die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ identifiziert werden.

Hinweis: Die Richtung „ $\Leftarrow$ “ sollte leicht sein. Für die Richtung „ $\Rightarrow$ “ kann es nützlich sein, die v_i zu einer Basis von V zu ergänzen.

Aufgabe 3 (1+1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum. Existieren lineare Abbildungen mit den folgenden Eigenschaften?

- (a) $f_1: V^* \otimes V^* \rightarrow V^*, f_1(\alpha \otimes \alpha')(v) = \alpha(v) + \alpha'(v)$ für alle $\alpha, \alpha' \in V^*$ und alle $v \in V$
- (b) $f_2: V \oplus V \rightarrow V \otimes V, f_2((v, v')) = v \otimes v'$ für alle $v, v' \in V$
- (c) $f_3: V \oplus V \rightarrow V \otimes K^3, f_3((v, v')) = v \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v' \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle $v, v' \in V$

Aufgabe 4 (2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein Körper und seien V_1, V_2, W_1, W_2 K -Vektorräume. Zeigen Sie: Sind $f_1: V_1 \rightarrow W_1$ und $f_2: V_2 \rightarrow W_2$ injektive lineare Abbildungen, so ist auch $f_1 \otimes f_2: V_1 \otimes V_2 \rightarrow W_1 \otimes W_2$ injektiv.

Hinweis: Sie können z. B. prüfen, was $f_1 \otimes f_2$ mit einer (geeigneten) Basis von $V_1 \otimes V_2$ macht.

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

In Aufgabe 5 kann man leicht zeigen, dass $(f_1 \otimes f_2)(v_1 \otimes v_2)$ nur dann 0 sein kann, wenn $v_1 \otimes v_2 = 0$ ist. Es ist verlockend zu glauben, dass $f_1 \otimes f_2$ dann injektiv sein muss. Wir wollen prüfen, dass das Argument falsch ist:

- (a) Geben Sie ein Element $w \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ an, das kein reiner Tensor ist, d. h. das sich nicht in der Form $v \otimes v'$ schreiben lässt, für $v, v' \in \mathbb{R}^2$.
Hinweis: Sie können z. B. Satz 8.3.18 verwenden zum Prüfen, dass sich w wirklich nicht so schreiben lässt.
- (b) Sei $U := \langle w \rangle_{\mathbb{R}}$ (für Ihr w aus (a)). Zeigen Sie, dass kein Element von $U \setminus \{0\}$ ein reiner Tensor ist.
- (c) Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung f von $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ in einen anderen $\mathbb{R}$ -Vektorraum W existiert, deren Kern genau U ist.

(Die konstruierte Abbildung f ist also nicht injektiv, aber nicht-0-Vektoren der Form $v_1 \otimes v_2$ werden von f nie auf 0 abgebildet.)

Aufgabe 6 (1+1 Punkte für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein Körper, V ein K -Vektorraum und seien $v_1, v_2, v_3 \in V$. Rechnen Sie nach, dass die folgenden Gleichungen gelten:

- (a) $(v_1 - v_2) \wedge (v_1 + v_2) = 2(v_1 \wedge v_2)$
- (b) $v_1 \wedge (v_1 + v_2) \wedge (v_1 + v_2 + v_3) = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$.