

Aufgabe 1 (Keine Punkte):

- (a) Zeigen Sie, dass genau eine lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^6$ existiert, die

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \text{ auf } \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{13} \\ c_{14} \\ c_{23} \\ c_{24} \\ c_{34} \end{pmatrix} \text{ abbildet, für } c_{ij} := a_i b_j - a_j b_i.$$

- (b) Zeigen Sie, dass f ein Isomorphismus ist.

Hinweis: Sie können z. B. prüfen, was f auf einer Basis macht.

- (c) Zeigen Sie, dass $f^{-1}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ nicht in der Form $v \wedge w$ schreibbar ist, für $v, w \in \mathbb{R}^4$.

Hinweis: Welche Koordinaten von v und w müssten ungleich 0 sein, um die beiden 1en zu erhalten?

Aufgabe 2 (Keine Punkte):

Sei K ein Körper und seien V und W K -Vektorräume.

- (a) Zeigen Sie: Ist $h \in \text{Hom}(V, W)$ ein Isomorphismus, so ist auch $\bigwedge^\ell h: \bigwedge^\ell V \rightarrow \bigwedge^\ell W$ ein Isomorphismus.
Hinweis: Betrachten Sie das Inverse von h und benutzen Sie Bemerkung 8.4.17.

- (b) In der Vorlesung wurde im Beweis von Satz 8.4.18 etwas salopp behauptet, dass wir annehmen können, dass $V = K^n$ ist. Erinnern Sie sich daran, wie $\det f$ für $f \in \text{End}(V)$ mit Hilfe eines Isomorphismusses $h: K^n \rightarrow V$ als Determinante einer Matrix $A \in K^{n \times n}$ definiert wurde, und zeigen Sie, dass Satz 8.4.18 für f aus 8.4.18 für A folgt.

Aufgabe 3 (Keine Punkte):

Benutzen Sie die Cramersche Regel, beim Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

die x_1 -Koordinate der Lösung zu bestimmen.

Aufgabe 4 (Keine Punkte):

- (a) $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3$ wurde als Quotient $(\mathbb{R}^3)^{\otimes 3} / U_3$ definiert, für einen bestimmten Untervektorraum U_3 . Bestimmen Sie $\dim U_3$.
Hinweis: Versuchen Sie nicht, die Dimension direkt an der Definition von U_3 abzulesen (das könnte ich auch nicht), sondern verwenden Sie Sätze aus der Vorlesung.
- (b) Bei $\bigwedge^2 \mathbb{R}^2$ erhält man analog zu (a) $\dim U_2 = 3$, d. h. es sollte möglich sein, drei Erzeuger von U_2 aus Definition 8.4.3 auszuwählen, die linear unabhängig sind. Geben Sie solche linear unabhängigen Erzeuger an.
Hinweis: Um zu prüfen, ob Ihre Erzeuger wirklich linear unabhängig sind, können Sie sie in einer Basis von $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ ausdrücken.