Lineare Algebra 2 – Blatt 2

Abgabe bis 28.4.2025, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (4 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Eine hermitesche Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt *positiv semidefinit*, wenn für alle $v \in \mathbb{C}^n$ gilt: $v^T A\bar{v} \geq 0$. Zeigen Sie: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist hermitesch und positiv semidefinit genau dann, wenn eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert, so dass $A := B^T\bar{B}$ gilt.

Hinweis für $\Rightarrow$: Wenn A eine Diagonalmatrix ist, kann man B explizit angeben. Um aus diesem Spezialfall den allgemeinen Fall zu erhalten, ist Bemerkung 6.5.6 nützlich.

Aufgabe 2 (2+2 für sinnvolle Bearbeitung):

Bestimmen Sie, ob die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ positiv definit ist...

(a) einmal mit dem Hauptminoren-Kriterium

(b) einmal, indem Sie eine Diagonalmatrix der Form S^*AS finden, für S invertierbar. (Sie brauchen S nicht explizit auszurechnen; es reicht, wenn Sie simultane Zeilen- und Spaltentransformationen auf A anwenden.)

Aufgabe 3 (2+2+2 für sinnvolle Bearbeitung):

Wir arbeiten auf $\mathbb{C}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Behauptung: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist unitär genau dann, wenn eine Orthonomalbasis $v_1, \dots, v_n$ von $\mathbb{C}^n$ und Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda_i| = 1$ existieren, so dass $Av_i = \lambda_i v_i$ gilt für $i = 1, \dots, n$. (Anders ausgedrückt: Nach einem geeigneten Basis-Wechsel ist A nur noch eine komplexe Drehung in jeder Koordinate.)

(a) Überprüfen Sie diese Behauptung an der Matrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ für $\alpha \in \mathbb{R}$, d. h. geben Sie entsprechende $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^2$ und $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ an.

(b) Zeigen Sie die Richtung „$\Rightarrow$“ der Behauptung.
Hinweis: Dies folgt größtenteils aus einem Satz aus der Vorlesung.

(c) Zeigen Sie die Richtung „$\Leftarrow$“ der Behauptung.
Hinweis: Es ist nützlich, die Basiswechselmatrix zu betrachten, die die Standardbasis auf $v_1, \dots, v_n$ abbildet. Und erinnern Sie sich daran, dass die Verknüpfung von unitären Matrizen wieder unitär ist.

Aufgabe 4 (1+1+1+1+1+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein beliebiger Körper und sei V ein K-Vektorraum. Wir wollen prüfen, dass eine Bilinearform auf V „das Gleiche“ ist wie eine lineare Abbildung von V nach $\mathrm{Hom}(V, K)$. Also:

(a) Wir wollen $\mathrm{Hom}(V, K)$ als K-Vektorraum auffassen, indem wir punktweise Addition und Skalarmultiplikation verwenden (wie in Beispiel 3.1.4), d. h. für $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}(V, K)$ und $r \in K$ sei $f_1 + f_2 \colon V \to K$ definiert durch $(f_1 + f_2)(v) := f_1(v) + f_2(v)$, und $r \cdot f_1 \colon V \to K$ sei definiert durch $(rf_1)(v) = rf_1(v)$.
Listen Sie auf, was zu prüfen ist, um zu sehen, dass man so wirklich einen K-Vektorraum erhält und prüfen Sie exemplarisch ein paar dieser Dinge, bis Sie sich selbst überzeugt haben, dass dies stimmt.

(b) Wir interessieren uns nun für lineare Abbildung von V nach $\mathrm{Hom}(V, K)$. Was wird in diesem Fall aus der Bedingung aus Bemerkung 4.2.3 (a)? (Sie sollten eine Bedingung der folgenden Form erhalten: Eine Abbildung $g \colon V \to \mathrm{Hom}(V, K)$ ist linear genau dann, wenn für alle ..... gilt: $(g(.....))(.....) = ...$)

(c) Sei nun $g \colon V \to \mathrm{Hom}(V, K)$ linear, und sei $\beta_g \colon V \times V \to K$ definiert durch $\beta_g(v, v') := (g(v))(v')$. Zeigen Sie, dass β_g eine Bilinearform ist.

(d) Sei nun umgekehrt $\beta \colon V \times V \to K$ eine beliebige Bilinearform. Wir definieren eine Abbildung $g_\beta \colon V \to \mathrm{Abb}(V, K)$ durch $(g(v))(v') := \beta(v, v')$. Zeigen Sie, dass das Bild von g_β in $\mathrm{Hom}(V, K)$ liegt.

(e) Zeigen Sie, dass g_β (als Abbildung von V nach $\mathrm{Hom}(V, K)$) linear ist.

(f) Folgern Sie, dass eine „naheliegende“ Bijektion zwischen der Menge der Bilinearformen auf V und der Menge der linearen Abbildungen von V nach $\mathrm{Hom}(V, K)$ existiert.