Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau
SoSe 2025

Lineare Algebra 2 – Blatt 3

Abgabe bis 5.5.2025, 10:30 Uhr im Ilias

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (4 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Ist es möglich, dass in einem endlich-dimensionalen Vektorraum V drei Untervektorräume U_1, U_2, U_3 existieren, so dass sowohl $V = U_1 \oplus U_2$ als auch $V = U_1 \oplus U_3$ als auch $V = U_2 \oplus U_3$ gilt? Genauer:

(a) Unter welchen Bedingungen an V existieren solche U_1, U_2, U_3? (In den Fällen, in denen solche U_i existieren, sollen Sie dies auch präzise begründen.)
Hinweis: Was können Sie über $\dim U_i$ sagen?

(b) Unter welchen Bedingungen an V geht das auch mit vier Untervektorräumen $U_1, \dots, U_4$ (d. h. $V = U_i \oplus U_j$ für alle $i \neq j$)?
Wenn Sie die gleiche Antwort wie bei (a) erhalten, war ihre Begründung nicht präzise genug: Betrachten Sie den Fall, dass wir über dem Körper $\mathbb{F}_2$ arbeiten und $V = \mathbb{F}_2^2$ ist. Warum existieren $U_1, \dots, U_4$ hier nicht?

Aufgabe 2 (2+2+2 für sinnvolle Bearbeitung):

(a) In Korollar 6.5.10 (und im Beweis davon) wurde aus einer quadratischen Form $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} b_{ij} x_i x_j$ eine Bilinearform $\beta(v, w) = v^T A w$ auf $\mathbb{R}^n$ konsturiert. Zeigen Sie, dass diese Konstruktion eine Bijektion zwischen den quadratischen Formen in n Variablen und den symmetrischen Bilinearformen auf $\mathbb{R}^n$ definiert.

(b) Sind V und W euklidische Vektorräume und $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ ein Isomorphismus, so nennt man f nach Def. 6.2.1 eine Isometrie, wenn für alle $v, v' \in V$ gilt: $\langle v, v' \rangle = \langle f(v), f(v') \rangle$. Das Wort „Isometrie" klingt eigentlich eher so, als würde es reichen, dass f Längen erhält, d. h. als würde man nur fordern, dass $\|v\| = \|f(v)\|$ gilt für alle $v \in V$. Folgern Sie aus (a), dass Isomorphismen, die (in diesem Sinne) Längen erhalten automatisch Isometrien im Sinne von 6.2.1 sind.
Hinweis: Identifizieren Sie V mit $\mathbb{R}^n$ und vergleichen Sie die quadratische Form $f_1(v) = \langle v, v \rangle$ mit der quadratischen Form $f_2(v) = \langle f(v), f(v) \rangle$.

(c) Das alles deutet darauf hin, dass man ein Skalarprodukt rekonstruieren kann, wenn man nur weiß, was die Norm von Vektoren ist. In der Tat: Geben Sie eine Formel an, mit der man das Skalarprodukt $\langle v, w \rangle$ aus $\|v\|^2$, $\|w\|^2$ und $\|v + w\|^2$ berechnen kann.

Aufgabe 3 (2 für sinnvolle Bearbeitung):

Im Beweis von Sylvesters Trägheitsatz wurde, um die Eindeutigkeit von n_1 zu erhalten, gezeigt: n_1 ist die maximale Dimension eines Untervektorraums U, so dass β positiv definit auf U ist. Warum wurde nicht einfach $U' = \{v \in V \mid v = 0 \vee \beta(v, v) > 0\}$ gesetzt und $n_1 = \dim U'$ gezeigt? Um dies zu sehen, bestimmen Sie U' im Fall $V = \mathbb{R}^2$ und

$$\beta(v, w) = v^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} w.$$

Aufgabe 4 (2+2 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei β eine symmetrische Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass sich $\mathbb{R}^n$ als direkte Summe $\mathbb{R}^n = U_{-1} \oplus U_0 \oplus U_1$ von Untervektorräumen U_{-1}, U_0, U_1 schreiben lässt mit den folgenden Eigenschaften:

- Die Einschränkung von β auf U_1 ist ein Skalarprodukt.
- Die Einschränkung von $-\beta$ auf U_{-1} ist ein Skalarprodukt.
- Für alle $u \in U_0$ und alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $\beta(u, v) = 0$.

Genauer:

(a) Nehmen Sie zunächst an, dass $\beta(v, w) = v^T A w$ ist für eine Diagonalmatrix A mit Diagonaleinträgen in $\{-1, 0, 1\}$. Geben Sie in diesem Fall U_1, U_0, U_{-1} explizit an.

(b) Benutzen Sie Sylvesters Trägheitssatz um aus (a) den allgemeinen Fall herzuleiten.

Aufgabe 5 (2+2 für sinnvolle Bearbeitung):

(a) Die Bedingung aus 7.1.2 (a) ist etwas kompliziert. Wäre Satz 7.1.2 nicht auch wahr, wenn man statt dessen fordern würde, dass $V = U_1 + \cdots + U_n$ ist und $U_i \cap U_j = \{0\}$ ist für alle $i \neq j$?
(Die Antwort ist nein. Finden Sie ein Gegenbeispiel.)

(b) Zeigen Sie, dass aber die folgende Aussage zu den anderen Aussagen aus 7.1.2 äquivalent ist:
$V = U_1 + \cdots + U_n$ und $\dim V = \dim U_1 + \cdots + \dim U_n$.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LA1-V-W24/