Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau
SoSe 2025

Lineare Algebra 2 – Blatt 4

Abgabe bis 12.5.2025, 10:30 Uhr im Ilias

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus. Ist f nilpotent, so wird jeder Vektor 0, wenn man f häufig genug darauf anwendet. Wir fragen uns, ob auch die Umkehrung gilt, also genauer: Wenn für jedes $v \in V$ ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $f^k(v) = 0$ ist, ist dann f automatisch nilpotent?

(a) Zeigen Sie, dass die Antwort ja ist, wenn V endlich-dimensional ist.
Hinweis: Was macht f^k mit einer Basis von V, wenn k groß genug ist?

(b) Überprüfen Sie, dass das folgende ein Gegenbeispiel ist für V unendlich-dimensional: Wir setzen $V = \mathbb{R}[x]$, und $f\colon \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ die Abbildung, die ein Polynom auf seine Ableitung abbildet, also

$$f(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i) = \sum_{i=1}^{n} i \cdot a_i \cdot x^{i-1}.$$

Aufgabe 2 (1+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei V ein euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Wir wollen die Begriffe des Komplements (Def. 7.1.4) und des orthogonalen Komplements (Def. 6.3.1) vergleichen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

(a) $U^\perp$ ist ein Komplement von U.

(b) Ist $U' \subseteq V$ ein Komplement von U, so muss $U' = U^\perp$ sein.

Aufgabe 3 (1+2+2 für sinnvolle Bearbeitung):

(a) Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ linear unabhängig. Begründen Sie, dass dann genau eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ existiert mit $Av_1 = v_2$ und $Av_2 = 0$. Begründen Sie außerdem, dass diese Matrix A nilpotent ist.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine nilpotente Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, bei der alle Einträge ungleich 0 sind.

(c) Geben Sie ein Beispiel für zwei nilpotente Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ an, so dass die Verknüpfung AB nicht nilpotent ist.

Hinweis: (a) kann nützlich sein, um die in (b) und (c) gesuchten Beispiele zu finden.

Aufgabe 4 (3 für sinnvolle Bearbeitung):

Welche reellen Zahlen λ können als Eigenwerte von nilpotenten Matrizen über $\mathbb{R}$ auftreten? Geben Sie für die λ, die auftreten können, eine Beispielmatrix an und begründen Sie für die anderen λ, dass sie nicht auftreten können.

Aufgabe 5 (2+2+2 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein Körper und sei $A \in K^{n\times n}$ eine nilpotente Matrix mit Nilpotenzgrad m.

(a) Rechnen Sie nach, dass die Matrix $\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i A^i$ die Inverse zu der Matrix $I_n + A$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass auch die Matrix $I_n - A$ invertierbar ist, indem Sie die Inverse analog zu Teil (a) direkt angeben.

(c) Benutzen Sie die Formel aus (a), um das Inverse der Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen.