Lineare Algebra 2 – Blatt 5

Abgabe bis 19.5.2025, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (1+3 Punkte für präzisen Aufschrieb):

(a) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Geben Sie einen A-invarianten Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ an, der $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ enthält aber nicht ganz $\mathbb{R}^3$ ist.

(b) Zeigen Sie: Ist K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $f \in \operatorname{End}(V)$ und $v \in V$, so ist $U := \langle v, f(v), f^2(v), \dots, f^{n-1}(v)\rangle_K$ der kleinste f-invariante Untervektorraum von V, der v enthält. Mit „kleinste“ ist gemeint: Ist U' irgend ein anderer f-invarianter Untervektorraum, der v enthält, so gilt $U \subseteq U'$.

Aufgabe 2 (2 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie alle A-invarianten Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3 (1+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein Körper. Wir nehmen an, dass $f \in \operatorname{End}(K^8)$ ein nilpotenter Endomorphismus ist mit Nilpotenzgrad 3 und Rang 4.

(a) Was kann die jordansche Normalform eines solchen f sein?

(b) Geben Sie für jede mögliche jordansche Normalform aus (a) jeweils $\dim(\operatorname{im} f^2)$ an.

Anmerkung: Sie sollten zwei verschiedene jordansche Normalformen finden.

Aufgabe 4 (2 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein Körper, sei $A \in K^{n\times n}$ eine nilpotente Matrix mit Nilpotenzgrad m und sei $v \in K^n$ so, dass $A^{m-1}v \neq 0$ ist. Zeigen Sie, dass die Vektoren $v, Av, A^2v, \dots, A^{m-1}v$ linear unabhängig sind.

Hinweis: Nehmen Sie an, dass es eine lineare Abhängigkeit gäbe. Was erhält man, wenn man A (evtl. mehrfach) auf diese lineare Abhängigkeit anwendet?

Aufgabe 5 (2+2+2 für sinnvolle Bearbeitung):

Überprüfen Sie Lemma 7.3.2 an der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, d. h.:

(a) Finden Sie das kleinste $N \in \mathbb{N}$, das Lemma 7.3.2 (a) erfüllt, d. h. so dass $\operatorname{im} A^N = \operatorname{im} A^{N'}$ und $\ker A^N = \ker A^{N'}$ für alle $N' \geq N$.

(b) Bestimmen Sie $\operatorname{im} A^N$ und $\ker A^N$ für das N aus (a) und prüfen Sie, dass $\operatorname{im} A^N \oplus \ker A^N = \mathbb{R}^3$ gilt.

(c) Gilt auch schon $\operatorname{im} A^{N'} \oplus \ker A^{N'} = \mathbb{R}^3$ für $N' < N$?

Aufgabe 6 (2+2 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie alle Eigenräume und alle Haupträume von A.

(b) Überprüfen Sie, dass $\mathbb{R}^3$ die direkte Summe aller Haupträume ist. Gilt dies auch für die Eigenräume?