Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau
SoSe 2025

Lineare Algebra 2 – Blatt 6

Abgabe bis 26.5.2025, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (2+2 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$. Wir betrachten außerdem $g := f \circ f - f - 5 \cdot \operatorname{id}_V \in \operatorname{End}(V)$.

(a) Sei v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert 10. Zeigen Sie: v ist auch ein Eigenvektor von g und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

(b) Zeigen Sie allgemeiner: Ist $p \in K[X]$ ein Polynom und v ein Eigenvektor von f zum Eigenwert λ, so ist v auch ein Eigenvektor von $p(f)$; geben Sie auch an, wie man den entsprechenden Eigenwert aus λ erhält.

Aufgabe 2 (2+2 für sinnvolle Bearbeitung):

Wie bei Aufgabe 1: Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f \in \operatorname{End}(V)$. Wir betrachten außerdem $g := f \circ f - f - 5 \cdot \operatorname{id}_V \in \operatorname{End}(V)$.

(a) Zeigen Sie: Wird ein Vektor $u \in V$ von g auf 0 abgebildet, so wird auch $f(u)$ von g auf 0 abgebildet.

(b) Zeigen Sie allgemeiner: Ist $p \in K[X]$ ein Polynom, so ist $\ker p(f)$ invariant unter f.

Aufgabe 3 (4 für sinnvolle Bearbeitung):

Bestimmen Sie die jordansche Normalform der Matrix

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}.$$

Aufgabe 4 (2 für sinnvolle Bearbeitung):

Wie viele Matrizen $A_i \in \mathbb{C}^{5\times 5}$ gibt es, die alle $(x-2)^3 \cdot (x-4) \cdot (x-6)$ als charakteristisches Polynom haben, so dass aber keine zwei dieser Matrizen ähnlich zueinander sind?

Hinweis: Was kann die jordansche Normalform einer Matrix mit diesem charakteristischen Polynom sein?

Aufgabe 5 (2 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei $f \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$ und sei $f = f_{\text{diag}} + f_{\text{nilp}}$ die Jordanzerlegung von f (aus Korollar 7.4.5). Wie kann man den Nilpotenzgrad von f_{nilp} and der jordanschen Normalform von f ablesen?

Aufgabe 6 (2+2 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und sei A^T die zu A transponierte Matrix. Zeigen Sie:

(a) Ist A in jordanscher Normalform, so ist A die jordansche Normalform von A^T.
Hinweis: Können Sie konkret eine Basis von $\mathbb{C}^n$ angeben, auf der A^T das macht, was eine jordansche Normalform machen soll?

(b) (Für A beliebig:) A ist ähnlich zu A^T.
Bemerkung 7.4.8 ist nützlich.