Lineare Algebra 2 – Blatt 7

Abgabe bis 2.6.2025, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (1+1+1+1 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) $\deg \mu_A = 1$ genau dann, wenn A die Form λI_n hat, für ein $\lambda \in K$.

(b) $\deg \mu_A = n$ genau wenn, wenn $\mu_A = \chi_A$ ist.

(c) Wenn in μ_A nur gerade Potenzen von x vorkommen, gilt $\mu_A(x) = \mu_{A^2}(x^2)$.

(d) Ist auch $B \in K^{n\times n}$, so ist $\mu_A\mu_B$ ein Vielfaches von μ_{AB}.

Aufgabe 2 (2+2 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom μ_A von A, indem Sie zwischen den Potenzen A^i eine lineare Abhängigkeit finden. Benutzen Sie zunächst einen Satz aus der Vorlesung, um eine gute Schranke zu erhalten, bis zu welchem i Sie die Potenzen A^i berechnen müssen.

(b) Berechnen Sie auch das charakteristische χ_A Polynom von A und vergleichen Sie es mit μ_A. Wie passt das mit Resultaten aus der Vorlesung zusammen?

Aufgabe 3 (1+1+2+2 für sinnvolle Bearbeitung):

Wir nehmen an, dass $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ eine Matrix ist, deren Minimalpolynom $\mu_A(x) = x^4 + 3x^2 - x + 8$ ist. Wir betrachten auch das Polynom $p(x) = -x^3 - 3x + 1$ und setzen $B := p(A)$.

(a) Bestimmen Sie $A \cdot B$, indem Sie es mit $\mu_A(A)$ vergleichen. (Sie sollten eine ganz explizite Matrix in $\mathbb{R}^{5\times 5}$ erhalten, unabhängig davon, was A genau ist.)

(b) Geben Sie mit Hilfe Ihres Ergebnisses aus (a) ein Polynom $q \in \mathbb{R}[x]$ an, so dass $q(A) = A^{-1}$ ist.

(c) Verallgemeinern Sie das Beispiel aus (a), (b): Wie kann man zu einer fast beliebigen Matrix $A \in K^{n\times n}$ aus dem Minimalpolynom μ_A ein Polynom $q \in K[x]$ erhalten, so dass $q(A) = A^{-1}$ ist? Und was ist die Bedingung, damit man ein solches q erhalten kann?

(d) Prüfen Sie nun, dass die Bedingung aus (c) immer erfüllt ist, wenn A invertierbar ist.
Hinweis: Mit Hilfe des Satzes von Cayley-Hamilton sollten Sie zeigen können: Wenn $\mu_A(0) = 0$ ist, ist auch $\chi_A(0) = 0$. Was hat $\chi_A(0) = 0$ mit Invertierbarkeit von A zu tun?

Aufgabe 4 (1+1+1+2+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Wir fassen in dieser Aufgabe $\mathbb{C}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auf. Um dies zu betonen, schreiben wir $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ für die Endomorphismen von $\mathbb{C}$, wenn wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auffassen.

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl.

(a) Prüfen Sie, dass die Multiplikationsabbildung $m_\alpha\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \alpha \cdot z$ in $\mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ liegt. (Was ist laut Definition von linearen Abbildungen zu prüfen?)

(b) Sei nun $p \in \mathbb{Q}[x]$ ein Polynom. Zeigen Sie, dass $p(m_\alpha) \in \mathrm{End}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C})$ die Multiplikationsabbildung mit $p(\alpha)$ ist.

(c) Wir wollen nun Satz 7.5.5 anwenden auf $K = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{C}$, $f = m_\alpha$ und $v = 1 \in \mathbb{C}$. Insbesondere setzen wir $v_i := (m_\alpha)^i(1)$ und $U := \langle v_i \mid i \in \mathbb{N}\rangle_{\mathbb{Q}}$. Schreiben Sie explizit hin, aus welchen komplexen Zahlen U besteht.

Wir nehmen ab jetzt an, dass die komplexe Zahl α eine Nullstelle eines Polynoms $p = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Q}[x]$ vom Grad $n \geq 1$ ist.

(d) Wir können Satz 7.5.5 nicht auf m_α anwenden, da $\mathbb{C}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum unendlich-dimensional ist. Zeigen Sie trotzdem: m_α besitzt ein Minimalpolynom μ_{m_α}. Was kann man über die Beziehung zwischen μ_{m_α} und p sagen?
Hinweis: (b) ist nützlich.

(e) Zeigen Sie, dass U (aus (c)) endlich-dimensional ist. Wie hängen die Minimalpolynome von m_α und von $m_\alpha|_U$ zusammen?