Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau
SoSe 2025

Lineare Algebra 2 – Blatt 8

Abgabe bis 10.6.2025, 10:30 Uhr im Ilias

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (1+1+2 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei $(M, \preceq)$ eine partielle Ordnung. Zeigen Sie:

(a) Ist $a \in M$ ein größtes Element, so ist a auch ein maximales Element.

(b) Ist M eine Totalordnung, so gilt auch die Umkehrung: Ist $a \in M$ ein maximales Element, so ist a auch ein größtes Element.

(c) Ist M endlich aber nicht leer, so besitzt M mindestens ein maximales Element.
Hinweis: Verwenden Sie Induktion. Im Induktionsschritt können Sie die Induktionsannahme auf $M \setminus \{a\}$ anwenden, für ein beliebiges $a \in M$. Um ein maximales Element von M zu finden, brauchen Sie dann noch eine geeignete Fallunterscheidung.

Aufgabe 2 (1+1+2 für sinnvolle Bearbeitung):

Wir schreiben $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ für die Menge der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

(a) Sei $s\colon \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$ definiert durch $s(F)\colon r \mapsto F(r+1)$ für $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), r \in \mathbb{R}$. Was bedeutet dies anschaulich? Genauer: Wie erhält man den Graph von $s(F)$ aus dem Graph von F?

(b) Machen Sie sich klar, dass $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist (welche Vektoraddition und Skalarmultiplikation sind wohl gemeint?) und zeigen Sie, dass s ein Endomorphismus von $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ ist.

(c) Wir wollen nun den kleinsten s-invarianten Untervektorraum $U \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R})$ bestimmen, der die Funktion $F_0\colon x \mapsto x^2$ enthält. Bestimmen Sie dazu $F_i := s^i(F_0)$ für natürliche Zahlen i, bis sich F_d als Linearkombination von $F_0, \dots, F_{d-1}$ schreiben lässt.

Aufgabe 3 (1+1+1+1+1+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Welche der Axiome einer partiellen Ordnung erfüllen die folgenden Relationen auf der Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

(a) $(a, a') \preceq (b, b')$, wenn $a + a' \leq b + b'$ gilt.

(b) $(a, a') \preceq (b, b')$, wenn $a \leq b$ und $a' \leq b'$ gilt.

(c) $(a, a') \preceq (b, b')$, wenn $a \leq b$ oder $a' \leq b'$ (oder beides) gilt.

(d) $(a, a') \preceq (b, b')$, wenn $a \leq b \leq a' \leq b'$ gilt.

In genau einem der obigen Beispiele sind alle Axiome erfüllt. In diesem Beispiel:

(e) Handelt es sich um eine totale Ordnung?

(f) Gibt es minimale/maximale/kleinste/größte Elemente? (Wenn ja, welche sind dies?)

Aufgabe 4 (1+1+1+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Wir betrachten die partielle Ordnung $\subseteq$ auf der Potenzmenge $\mathcal{M} := \mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5\})$ (vgl. Beispiel 8.1.8).

(a) Geben Sie eine möglichst große Teilmenge $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{M}$ an, die eine Kette ist.
(Bevor Sie loslegen: Überlegen Sie sich, was für Objekte die Elemente von $\mathcal{A}_1$ sind.)

(b) Geben Sie eine Teilmenge $\mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{M}$ an, die genau ein maximales und genau zwei minimale Elemente besitzt. (Damit ist gemeint: Wenn wir die Relation $\subseteq$ nur auf der Menge $\mathcal{A}_2$ betrachten, soll es (in $\mathcal{A}_2$) genau ein maximales und genau zwei minimale Elemente geben.)

(c) Welche Elemente von $\mathcal{M}$ sind obere Schranken von $\mathcal{A}_3 := \{\{1, 2\}, \{2, 3, 5\}, \{5\}, \emptyset\}$?

(d) Gibt es eine Teilmenge $\mathcal{A}_4 \subseteq \mathcal{M}$, die ein Element a besitzt, das sowohl minimal als auch maximal in $\mathcal{A}_4$ ist, so dass aber $\mathcal{A}_4$ noch weitere Elemente (außer a) enthält?

Aufgabe 5 (1+1 für sinnvolle Bearbeitung):

(a) An mehreren Stellen in der Vorlesung war von einem „kleinsten Untervektorraum" eines Vektorraums V die Rede, nämlich in Satz 3.2.6 und in Satz 7.5.11. Begründen Sie, dass es sich dabei wirklich um das kleinste Element im Sinne von Definition 8.1.9 handelt, für eine bestimmte partielle Ordnung $\preceq$ auf einer bestimmten Menge M. Was sind M und $\preceq$?

(b) Wenn man für die gleiche Ordnung $\preceq$ auf M wie in (a) „minimaler Untervektorraum" geschrieben hätte, was hätte dies dann bedeutet?

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LA1-V-W24/