Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau
SoSe 2025

Lineare Algebra 2 – Blatt 9

Abgabe bis 16.6.2025, 10:30 Uhr im Ilias

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Bei der ersten Aufgabe erhalten Sie die Punkte nur, wenn die Lösung mathematisch sauber aufgeschrieben ist. Bei den restlichen Aufgaben erhalten Sie alle Punkte bereits für sinnvolles Bearbeiten.

Aufgabe 1 (4 Punkte für präzisen Aufschrieb):

Sei $(M, \preceq)$ eine partiell geordnete Menge. Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq M$ eine Antikette, wenn je zwei verschiedene Elemente a und a' von A unvergleichbar sind, also weder $a \preceq a'$ noch $a' \preceq a$ gilt. Zeigen Sie, dass M eine Antikette A besitzt, sodass jedes Element von M mit einem Element von A vergleichbar ist.

Hinweis: Wenden Sie Zorns Lemma auf die durch "$\subseteq$" geordnete Menge aller Antiketten von M an.

Aufgabe 2 (1+1+1+1 für sinnvolle Bearbeitung):

In dieser Aufgabe wollen wir Bemerkung 8.1.15 (a) zeigen, d. h.: Ist K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $B \subseteq V$, so ist B genau dann eine Basis von V, wenn sich jeder Vektor aus V auf genau eine Weise als Linearkombination von Vektoren aus B schreiben lässt.

Man könnte einfach den Beweis von Satz 3.4.3 anpassen. Wir wollen aber die Arbeit sparen, den Beweis komplett neu zu machen und statt dessen Satz 3.4.3 verwenden. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(a) Zeigen Sie: Wenn sich ein v auf mehrere Arten als Linearkombination von Vektoren aus B schreiben lässt, dann gibt es bereits einen endlich-dimensionalen Untervektorraum $U \subseteq V$ und eine endliche Teilmenge $B' \subseteq B \cap U$, so dass sich v auf mehrere Arten als Linearkombination von Vektoren aus B' schreiben lässt.
Hinweis: Finden Sie zunächst B' (und definieren Sie damit dann U).

(b) Wenden Sie 3.4.3 auf $B' \subseteq U$ (aus (a)) an, um eine Richtung von Bemerkung 8.1.15 (a) zu zeigen.

(c) Zeigen Sie: Ist B linear abhängig, so existiert ein endlich-dimensionaler Untervektorraum $U \subseteq V$ und eine endliche Teilmenge $B' \subseteq B \cap U$, die linear abhängig ist.

(d) Wenden Sie 3.4.3 auf $B' \subseteq U$ (aus (c)) an, um die andere Richtung von Bemerkung 8.1.15 (a) zu zeigen.

Aufgabe 3 (1+2+2+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Kann ein nicht-trivialer Vektorraum V isomorph zu $V \oplus V$ sein?

(a) Begründen Sie, dass das nicht sein kann, wenn V endlich-dimensional ist.

(b) Jetzt betrachten wir $V = \mathbb{R}^{\oplus \mathbb{N}}$ und die Untervektorräume $U_0 = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in V \mid a_i = 0 \text{ für alle geraden } i\}$ $U_1 = \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in V \mid a_i = 0 \text{ für alle ungeraden } i\}$.
Zeigen Sie, dass $V = U_0 \oplus U_1$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass durch $(a_0, a_1, a_2, \dots) \mapsto (a_0, 0, a_1, 0, a_2, 0, \dots)$ ein Isomorphismus von V nach U_0 definiert wird.

(d) Geben Sie analog einen Isomorphismus von V nach U_1 an und folgern Sie, was die Antwort auf die Anfangsfrage ist.

Aufgabe 4 (1+1+1 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein Körper, seien V und W K-Vektorräume und sei $v \in V$. In Bemerkung 8.2.2 wurde behauptet, dass die Evaluationsabbildung $\operatorname{Hom}(V, W) \to W, f \mapsto f(v)$ linear ist.

(a) Schreiben Sie die präzise Bedeutung davon auf (unter Verwendung der Vektorraumstruktur auf $\operatorname{Hom}(V, W)$ aus Konvention 8.2.1).

(b) Zeigen Sie, dass die Behauptung wahr ist.

(c) Ist die Behauptung auch wahr, wenn man $\operatorname{Hom}(V, W)$ durch die Menge $\operatorname{Abb}(V, W)$ aller (beliebigen) Abbildungen von V nach W ersetzt (auch wieder mit punktweiser Addition und Skalarmultiplikation, wie in Beispiel 3.1.4)?
Anmerkung: Die Antwort könnte (auf den ersten Blick) überraschend sein.

Aufgabe 5 (1+2 für sinnvolle Bearbeitung):

Sei K ein Körper, V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum.

(a) Unter welchen Bedingungen an U gibt es ein $\alpha \in V^*$, so dass $U = \ker \alpha$ ist?

(b) Zeigen Sie, dass immer endlich viele $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in V^*$ exisiteren, so dass $U = \ker \alpha_1 \cap \dots \cap \ker \alpha_k$ gilt. Wie hängt k mit U zusammen?
Hinweis: Sie können entweder abstrakte Argumente verwenden, oder Sie können die α_i explizit angeben, wenn Sie V so mit K^n identifizieren, dass $U = \langle e_1, \dots, e_m \rangle_K$ ist. Dann müssen Sie natürlich begründen, dass ein entsprechender Isomorphismus $g \colon K^n \to V$ existiert.

Vorlesungswebseite: http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/LA1-V-W24/