Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Sommersemester 2025

Linear Algebra II
Probeklausur
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v, v', w, w' \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\beta(\lambda v + v', \mu w + w') &= \alpha_1(\lambda v + v')\alpha_2(\mu w + w')\\ &= (\lambda\alpha_1(v) + \alpha_1(v'))(\mu\alpha_2(w) + \alpha_2(w'))\\ &= \lambda\alpha_1(v)\mu\alpha_2(w) + \lambda\alpha_1(v)\alpha_2(w') + \alpha_1(v')\mu\alpha_2(w) + \alpha_1(v')\alpha_2(w')\\ &= \lambda\mu\beta(v,w) + \lambda\beta(v,w') + \mu\beta(v',w) + \beta(v',w').\end{aligned}$$

D.h., β ist bilinear.

b) **„$\Leftarrow$“:** Angenommen, dass α_1 und α_2 linear abhängig sind. Wenn $\alpha_1 = 0$ ist, gilt $\beta = 0$, was symmetrisch ist. Analog gilt $\beta = 0$ wenn $\alpha_2 = 0$. Wenn α_1 sowohl α_2 nicht null sind, dann existiert $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sodass $\lambda\alpha_1 = \alpha_2$. Seien $v, w \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\beta(v,w) &= \alpha_1(v)\alpha_2(w)\\ &= \lambda\alpha_1(v)\lambda^{-1}\alpha_2(w)\\ &= \alpha_2(v)\alpha_1(w)\\ &= \beta(w,v).\end{aligned}$$

D.h., β ist symmetrisch.

„$\Rightarrow$“: Angenommen nun, dass α_1 und α_2 linear unabhängig sind. Dann existieren $\alpha_3, \ldots, \alpha_n \in V^*$ sodass $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Basis von V^* bilden. Aus der Vorlesung, und da V endlich dimensional ist, folgt, dass eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V existiert, zu der $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die duale Basis ist. Insbesondere gilt

$$\begin{matrix}\alpha_1(v_1) = 1 & \alpha_1(v_2) = 0\\ \alpha_2(v_1) = 0 & \alpha_2(v_2) = 1\end{matrix}\,.$$

Dann ist $\beta(v_1, v_2) = \alpha_1(v_1)\alpha_2(v_2) = 1$ und $\beta(v_2, v_1) = \alpha_1(v_2)\alpha_2(v_1) = 0$, also ist β nicht symmetrisch.

Andere Lösung für „$\Rightarrow$“: Angenommen nun, dass β symmetrisch ist. Wenn entweder α_1 oder α_2 null ist, dann sind sie linear abhängig. Wenn beide α_1 und α_2 nicht null sind, dann existieren $v_1, v_2 \in V$ sodass $\alpha_1(v_1) \neq 0$ und $\alpha_2(v_2) \neq 0$. Sei $v \in \ker(\alpha_1)$. Dann gilt $\beta(v, v_1) = \alpha_1(v)\alpha_2(v_1) = 0$, und auch $\beta(v_1, v) = \alpha_1(v_1)\alpha_2(v) = 0$ per Symmetrie. Aber $\alpha_1(v_1) \neq 0$, daraus folgt $\alpha_2(v) = 0$, d.h., $\ker(\alpha_1) \subseteq \alpha_2$. Analog betrachten wir $v \in \ker(\alpha_2)$, dann gilt $\beta(v_2, v) = 0 = \beta(v, v_2)$, also $\alpha_1(v) = 0$ und $\ker(\alpha_1) = \ker(\alpha_2)$. Sei U ein Komplement von $\ker(\alpha_1)$. Seien $v, w \in U \setminus 0$, dann setzen wir $\lambda = \alpha_1(v) \in \mathbb{R} \setminus 0$ und $\mu = \alpha_1(w) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt $\alpha_1(\mu v - \lambda w) = \mu\lambda - \lambda\mu = 0$, also $\mu v - \lambda w \in \ker(\alpha_1)$. Aber $\mu v - \lambda w \in U$, also $\mu v - \lambda w = 0$, d.h., v und w sind linear abhängig und $\dim(U) = 1$.

Sei $v \in U \backslash 0$. Wir setzen $b = \alpha_1(v)$ und $c = \alpha_2(v)$. Sei $w \in V$, dann ist $w = u + w'$ mit $u \in U$ und $w' \in \ker(\alpha_1)$. Da $\dim(U) = 1$ sind u und v linear abhängig, also $u = \lambda v$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $\alpha_1(w) = \alpha_1(u + w') = \lambda\alpha_1(v) = \lambda b$ und $\alpha_2(w) = \lambda c$. Da $v \in U \setminus \{0\}$, $v \notin \ker \alpha_1$ und $b = \alpha_1(v) \neq 0$. Daraus folgt $\frac{c}{b}\alpha_1(w) = \alpha_2(w)$, also $\frac{c}{b}\alpha_1 = \alpha_2$ und sie sind linear abhängig.

c) Sei $v \in \ker \alpha_1$. Dann $\beta(v, v) = \alpha_1(v)\alpha_2(v) = 0$, also $v = 0$ da β positiv definit ist. Also $\ker(\alpha_1) = \{0\}$. Aber $\dim(V) = \dim \ker \alpha_1 + \dim \operatorname{im} \alpha_1$, und $\operatorname{im} \alpha_1 \subseteq \mathbb{R}$, also $\dim \operatorname{im} \alpha_1 \leqslant 1$ und $\dim(V) = \dim \ker \alpha_1 + \dim \operatorname{im} \alpha_1 \leqslant 1$.

Aufgabe 2.

a) Wir schreiben in diese Aufgabe $[\cdot, \cdot]$ für das standard Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$. Seien $v, w \in V$, dann liegt $\langle v, w\rangle = [h(v), h(w)] \in \mathbb{R}$.

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $v, v', w, w' \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\langle \lambda v + v', \mu w + w'\rangle &= [h(\lambda v + v'), h(\mu w + w'] \\
&= [\lambda h(v) + h(v'), \mu h(w) + h(w')] \\
&= \lambda\mu[h(v), h(w)] + \lambda[h(v), h(w')] + \mu[h(v'), h(w)] + [h(v'), h(w')] \\
&= \lambda\mu\langle v, w\rangle + \lambda\langle v, w'\rangle + \mu\langle v', w\rangle + \langle v', w'\rangle.
\end{aligned}$$

D.h., $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ist eine Bilinearform.

Seien $v, w \in V$. Dann gilt $\langle v, w\rangle = [h(v), h(w)] = [h(w), h(v)]\langle w, v\rangle$, d.h., $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ist symmetrisch.

Sei $v \in V$. Dann $\langle v, v\rangle = [h(v), h(v)] \geqslant 0$. Sei nun $v \in V$ mit $\langle v, v\rangle = 0$. Dann gilt $[h(v), h(v)] = 0$, also $h(v) = 0$. Da h injektiv ist, folgt $v = 0$, d.h., $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ist positiv definit.

b) Sei h definiert durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = h(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})^T h(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$.

c) Seien $u_1, \ldots, u_k$ eine Basis von U und $u'_1, \ldots, u'_\ell$ eine Basis von U'. Dann ist $u_1, \ldots, u_k, u'_1, \ldots, u'_\ell$ eine Basis von V. Sei $h \colon V \to \mathbb{R}^{k+\ell}$ die Isomorphismus definiert durch $h(u_i) = e_i$ und $h(u'_i) = e_{k+i}$. Sei $u \in U$ und $u' \in U'$. Dann gilt $u = \sum a_i u_i$ und $u' = \sum b_i u' i$, und $\langle u, u'\rangle = \sum\sum a_i b_j \langle u_i, u'_j\rangle = \sum\sum a_i b_j e_i^T e_{k+j} = 0$.

Aufgabe 3.

a) Es gilt $\dim \operatorname{im} A^3 = n - 3$ wenn $n \geqslant 3$, und 0 wenn $n < 3$.

b) Sei B eine solche Matrix. Sei J die jordansche Normalform von B. Dann sind B^3 und J^3 ähnlich, und daraus folgt dass $\mathrm{rk}(B^3) = \mathrm{rk}(J^3)$. Seien $r_1, \ldots, r_k$ die Größte von die Blocke von J. Also $n = r_1 + \cdots + r_k$. J^3 ist nun die matrix mit Blocke J_i^3, wobei J_i ist die i-te Block (mit Größte r_i), und aus a) folgt, dass $\mathrm{rk}(J_i^3) = r_i - 3$ wenn $r_i \geqslant 3$ und 0 wenn $r_i < 3$.

Dann haben wir $2 = \mathrm{rk}(B^3) = \mathrm{rk}(J^3) = \mathrm{rk}(J_1^3) + \cdots + \mathrm{rk}(J_k^3)$. Also J hat entweder ein Block mit Größte 5 oder zwei Blocke mit Größte 4, insbesondere, $n \geqslant 5$, und $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist ein Beispiel.

c) Aus der Vorlesung folgt, dass $(B_1 \otimes B_2)^k = (B_1)^k \otimes (B_2)^k$. Sei nun k sodass $B_1^k = 0$ und seien $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt $(B_1 \otimes B_2)^k(e_i \otimes e_j) = B_1^k(e_i) \otimes B_2^k(e_j) = 0 \otimes B_2^k(e_j) = 0$, also $(B_1 \otimes B_2)^k$ schickt eine Basis nach 0. D.h., $(B_1 \otimes B_2)^k = 0$ und $B_1 \otimes B_2$ ist nilpotent.

Aufgabe 4.

a) Die jordansche Normlaform von A ist $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, und die jordansche Normlaform von B ist B selbst. Die sind verschieden, also sind A und B nicht ähnlich.

b) Es gilt $Ae_1 = e_1$, $Ae_2 = e_2$, und $Ae_3 = e_1 + e_3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \textstyle\bigwedge^2 A(e_1 \wedge e_2) &= Ae_1 \wedge Ae_2 = e_1 \wedge e_2 \\ \textstyle\bigwedge^2 A(e_1 \wedge e_3) &= Ae_1 \wedge Ae_3 = e_1 \wedge (e_1 + e_3) = e_1 \wedge e_3 \\ \textstyle\bigwedge^2 A(e_2 \wedge e_3) &= Ae_2 \wedge Ae_3 = e_2 \wedge (e_1 + e_3) = -e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3. \end{aligned}$$

Also die Matrix von $\bigwedge^2 A$ ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) C ist diagonalisierbar gdw. eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von $\mathbb{C}^n$ existiert, mit $Cv_i = \lambda_i v_i$. Aber dann gilt für alle $1 \leqslant i < j \leqslant n$: $\bigwedge^2 C(v_i \wedge v_j) = Cv_i \wedge Cv_j = \lambda_i \lambda_j v_i \wedge v_j$, d.h., jede $v_i \wedge v_j$ ist ein EV von $\bigwedge^2 C$, und die Menge $\{v_i \wedge v_j \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$ ist eine Basis von $\bigwedge^2 \mathbb{C}^n$, die nur EV von $\bigwedge^2 C$ enthält, d.h., $\bigwedge^2 C$ ist diagonalisierbar.

Aufgabe 5.

a) Sei $a \in \mathbb{R}^{\oplus \mathbb{N}}$. f ist so, dass $f(a)_0 = 0$ und $f(a)_i = a_{i-1}$ wenn $i > 0$. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$, dass $f^k(a)_i = a_{i-k}$ gilt für alle $i \geqslant k$ und $f^k(a)_i = 0$ für alle $i < k$.

Sei nun $a \in \mathbb{R}^{\oplus \mathbb{N}}$ die Folge mit $a_0 = 1$ und $a_i = 0$ für alle $i > 0$. Dann gilt $(p(f)(a))_2 = (f^3(a))_2 + 2(f^2(a))_2 = 0 + 2a_{2-2} = 2 \neq 0$, d.h., $p(f)(a)$ ist nicht die Nullfolge.

b) Sei $q \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. Wir schreiben $q(x)$ als $\sum_{i=0}^n b_i x^i$, wobei $n = \deg(q)$, also $b_n \neq 0$. Sei $a \in \mathbb{R}^{\oplus \mathbb{N}}$ wie oben, also $a_0 = 1$ und $a_i = 0$ für $i > 0$. Dann gilt $(q(f)(a))_n = \sum_{i=0}^n b_i (f^i(a))_n = \sum_{i=0}^n b_i a_{n-i} = b_n \neq 0$, also ist $q(f)$ nicht die Nullabbildung.

c) Sei $a \in \ker(p(f))$. Es gilt $(p(f)(a))_i = \begin{cases} 0 & \text{wenn } i < 2 \\ 2a_0 & \text{wenn } i = 2 \\ a_{i-3} + 2a_{i-2} & \text{wenn } i > 2 \end{cases}$.

Insbesondere ist $a_0 = 0$. Angenommen, dass $a_i = 0$ für $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(p(f)(a))_{i+3} = a_i + 2a_{i+1} = 2a_{i+1}$. Da $a \in \ker(p(f))$ liegt, gilt $(p(f)(a))_{i+3} = 0$, also $a_{i+1} = 0$. Per Induktion folgt, dass $a_i = 0$ gilt für alle $i \in \mathbb{N}$. Also gilt $\ker(p(f)) = \{0\}$ und $p(f)$ ist injektiv.