Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Sommersemester 2025

Linear Algebra II
Übungsblatt 1
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1. Wir arbeiten als erstes auf $\mathbb{R}^n$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Es gilt offensichtlich:

a) $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T$ (Satz 4.4.1)
b) A und A^T haben die gleichen Eigenwert, da $\det(A^T - \lambda I) = \det(A^T - \lambda I^T) = \det((A-\lambda I)^T) = \det(A - \lambda I)$.

Sei nun V ein endlich-dimensionaler euklidischer $\mathbb{R}$-Vektorraum und sei $f \in \operatorname{End}(V)$. Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to V$ eine Isometrie. Wir nennen $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Es gilt $g^* = \varphi^{-1} \circ f^* \circ \varphi$: Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Dann $\langle g(v), w\rangle = \langle \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(v), w\rangle = \langle f \circ \varphi(v), \varphi(w)\rangle = \langle \varphi(v), f^* \circ \varphi(w)\rangle = \langle v, \varphi^{-1} \circ f^* \circ \varphi(w)\rangle$. D.h., für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$, $\langle v, g^*(w)\rangle = \langle v, \varphi^{-1} \circ f^* \circ \varphi(w)\rangle$, also folgt $g^* = \varphi^{-1} \circ f^* \circ \varphi$.
Dann gilt:

- $\operatorname{rk} g^* = \operatorname{rk} g$, und weil φ eine Isometrie ist, ist es inbesondere ein Isomorphismus, und $\operatorname{rk} f = \operatorname{rk} g$, $\operatorname{rk} f^* = \operatorname{rk} g^*$.
- g und g^* haben die gleiche Eigenwerte. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ EW von g. Dann gibt es $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $g(v) = \lambda v$. Dann gilt $\varphi(g(v)) = \lambda\varphi(v)$ und daraus folgt $f(\varphi(v)) = \lambda\varphi(v)$, d.h., λ ist auch EW von f.

  Analog sind auch EW von g^* EW von f^*.

Aufgabe 2. Wir nennen $M = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Weil $\dim(U) = 1$ und $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 < \infty$, gilt $\dim(U^\perp) = \dim(\mathbb{R}^2) - \dim(U) = 1$. Wir brauchen also nur einen Vektor in $U^\perp$ zu finden.

   Eine Basis von U ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sei $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in U^\perp$ gdw. $\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 0$. Es gilt aber $\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 4a + b$.

   Insbesondere $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \in U^\perp$, und $U^\perp = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$.

b) Sei A^* die Matrix von f^*. Dann gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$, dass $\langle Av, w\rangle = \langle v, A^* w\rangle$, oder $v^T A^T M w = v^T M A^* w$. Weil das gilt für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$, haben wir $A^T M = M A^*$, oder $M^{-1} A^T M = A^*$. Daraus folgt $A^* = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{-1}{9} & \frac{11}{9} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3. $(f \circ g)^*$ ist der (eindeutige) Endomorphismus, sodass $\langle v, f \circ g(w) \rangle = \langle (f \circ g)^*(v), w \rangle$ gilt. Per Definition gilt aber $\langle v, f \circ g(w) \rangle = \langle f^*(v), g(w) \rangle = \langle g^* \circ f^*(v), w \rangle$, d.h., $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

Über $\mathbb{R}^2$, sei f der Endomorphismus definiert durch $f(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ und g der Endomorphismus definiert durch $g(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $f \circ g(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$. Es gilt $f^* = f$, $g^* = g$, aber $(f \circ g)^*(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$, d.h, $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$; aber $f^* \circ g^*(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4.

a) Offensichtlich ist V abgeschlossen unter $+$ und $\cdot$. Der Nullvektor ist $\mathbf{0}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $x \mapsto 0$. Assoziativität und Distributivität sind auch ganz klar.

b) Bilinearität folgt aus der Linearität des Integrals und Symmetrie aus der Kommutativität der Multiplikation.

   Sei $f \in V$, $f \neq \mathbf{0}$. Dann ist $f(x)^2 \geqslant 0$ für alle $x \in [0,1]$ und $\exists a \in [0,1]$ mit $f(a)^2 > 0$ (außerdem ist $f = \mathbf{0}$). Aus Stetigkeit von f folgt, dass $[a,b] \subseteq [0,1]$ existiert mit $f(x)^2 > 0$ für alle $x \in [a,b]$, und daraus folgt $\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(x)^2 dx = \int_0^a f(x)^2 dx + \int_a^b f(x)^2 dx + \int_b^1 f(x)^2 dx \geqslant 0 + \int_a^b f(x)^2 dx + 0 > 0$.

c) Offensichtlich ist $\mathbf{0} \in U$. Sei nun $f, g \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir betrachten die Abbildung $h := \lambda f + g$. Dann ist $h(0) = \lambda f(0) + g(0) = 0$, d.h., $h \in U$.

d) Sei $f \in U^\perp$. Die Abbildung $g := x \cdot f$ liegt in U, da $g(0) = 0 \cdot f(0) = 0$. Also muss $\langle f, g \rangle = 0$ sein. Es gilt auch $\langle f, g \rangle = \int_0^1 x f(x)^2 dx$. Weil $x f(x)^2 \geqslant 0$ ist, muss, damit das Integral 0 sein kann, $x f(x)^2 = 0$ sein für alle $x \in [0,1]$, und daraus folgt $f(x)^2 = 0$ für alle $x \in (0,1]$. Weil f stetig ist, gilt auch $f(0) = 0$, also $f = \mathbf{0}$: $U^\perp = \{\mathbf{0}\}$.

e) $(U^\perp)^\perp = \{\mathbf{0}\}^\perp = \{f \in V \mid \langle f, \mathbf{0} \rangle = 0\} = V$, und V ist echt größer als U weil z.B. $\mathbf{1}\colon [0,1] \to R$, $x \mapsto 1$ in V liegt aber nicht in U.

Aufgabe 5. Sei $\beta\colon V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear und $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ sodass $\beta(v,w) = \langle v, f(w) \rangle$. Wir betrachten die folgende Eigenschaften:

(i)* f^* ist invertierbar

(iv)* Für jede $w \in V \setminus \{0\}$ existiert $v \in V$ mit $\beta(v,w) \neq 0$.

Aus Aufgabe 1 folgt, dass (i)$\Leftrightarrow$(i)*.

(i)$\Rightarrow$(iv). Angenommen, dass f invertierbar ist. Sei $v \in V \setminus \{0\}$. Weil f invertierbar und insbesondere bijektiv ist, existiert $w \in V$ mit $f(w) = v$. Also gilt $\beta(v,w) = \langle v, f(w) \rangle = \langle v, v \rangle \neq 0$ weil $v \neq 0$ ist.

Analog gilt (i)$^*\Rightarrow$(iv)*.

¬(i)*⇒ ¬(iv). Angenommen, dass f^* nicht invertierbar ist. Also existiert $w \in V \setminus \{0\}$ so dass $f^*(v) = 0$. Daraus folgt, dass $\beta(v, w) = \langle v, f(w)\rangle = \langle f^*(v), w\rangle = 0$ gilt für alle $w \in V$. Für so ein v existiert also kein w sodass $\beta(v, w) \neq 0$.
Analog gilt ¬(i)⇒ ¬(iv)*. Jetzt haben wir also (i)⇔(iv)⇔(iv)*⇔(i)*.

¬(iv)*⇒ ¬(iii). Angenommen, dass $w \in V \setminus \{0\}$ existiert, sodass $\beta(v, w) = 0$ gilt für alle $v \in V$. Sei $g\colon V \to \mathbb{R}$ linear, sodass $g(w) \neq 0$ ist (z.B., g definiert durch $g(v) = \langle w, v\rangle$). Da $g(w) \neq 0$ ist aber $\beta(v, w) = 0$ ist für alle $v \in V$, gibt es kein $v \in V$ mit $g(w) = \beta(v, w)$.

(i)⇔(ii). Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und A wie in (ii). Sei $B\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch $B(v, w) = v^T Aw$. B ist offensichtlich bilinear, und es gilt $B(e_i, e_j) = a_{ij} = \beta(v_i, v_j)$.
Also $B(\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}) = \beta(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n)$.
Angenommen, dass $f(w) = 0$ für ein $w \in V$. Dann gilt $\beta(v, w) = 0$ für alle $v \in V$. Wir schreiben w als $\sum_{i=1}^n \mu_i v_i$. Dann gilt $B(e_i, \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}) = \beta(v_i, w) = 0$. Also $e_i^T(A \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}) = 0$ für alle i und daraus folgt $A \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$.
Analog, wenn $A \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ ist für ein $\begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, gilt $f(\sum_{i=1}^n \mu_i v_i) = 0$.
Also $\ker f = \{0\}$ gdw $\ker A = \{0\}$, und f ist invertierbar gdw A invertierbar ist.

(ii)⇒(iii). Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und A wie in (ii). Angenommen, dass A invertierbar ist. Sei B definiert wie oben, d.h., $B(v, w) = v^T Aw$ für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$, und es gilt $B(\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}) = \beta(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n)$.
Sei nun $g\colon V \to \mathbb{R}$ linear. Sei $G = (g(v_1), \dots, g(v_n)) \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Es gilt für alle $\mu_1, \dots, \mu_n \in \mathbb{R}$, dass $G \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \mu_i g(v_i) = g(\sum_{i=1}^n \mu_i v_i)$ ist.
Sei $v' = (GA^{-1})^T \in \mathbb{R}^n$. Also gilt für alle $w \in R^n$, dass $B(v', w) = v^T Aw = Gw$. Wir schreiben v' als $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$. Wir setzen $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in V$. Sei $w \in V$. Wir schreiben w als $\sum_{i=1}^n \mu_i v_i$. Dann gilt $g(w) = G \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix} = B(\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mu_1\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}) = \beta(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n) = \beta(v, w)$.