Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Sommersemester 2025

Linear Algebra II
Übungsblatt 10
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) Es gilt $U'' = \bigcap_{\alpha \in U'} \ker \alpha$. Jede $\ker \alpha$ ist ein Untervektorraum von V, also ist U'' auch ein Untervektorraum von V.

Sei $v \in U$ und sei $\alpha \in U'$. Per Definition von U' gilt $\alpha(v) = 0$. Also ist $v \in \ker \alpha$. Daraus folgt, dass $v \in U''$ liegt, d.h., $U \subseteq U''$.

Wenn $U = V$, dann gilt $U'' = V$ und $U = U''$. Angenommen nun, dass $U \neq V$, und sei $v \in V \setminus U$. Sei B eine Basis von U, dann ist $B \cup \{v\}$ linear unabhängig. Wir erganzen sie zu eine Basis B' von V, und wir definieren nun $\alpha \in V^*$ durch $\alpha(v) = 1$ und $\alpha(w) = 0$ für alle $w \in B' \setminus \{v\}$. Dann gilt $\ker \alpha = \langle B' \setminus \{v\} \rangle_K$, d.h., $\alpha \in U'$, und $\alpha(v) \neq 0$, also $v \notin U''$, d.h., $V \setminus U \subseteq V \setminus U''$ oder $U'' \subseteq U$.

b) Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ eine Basis von U und seien $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n \in V^*$ sodass $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eine Basis von V^* ist. Aus Kor. 8.2.18 folgt, dass eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V existiert, sodass $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die duale Basis zu $v_1, \ldots, v_n$ ist.

Sei $i \leqslant m$ und $j > m$, dann gilt $\alpha_i(v_j) = 0$. Sei nun $\alpha \in U$, dann lässt sich α als $\sum_{i=1}^m b_i \alpha_i$ schreiben, und daraus folgt $\alpha(v_j) = 0$, d.h., $v_j \in U'$ gilt.

Per Definition von U' gilt auch $\alpha(U') = \{0\}$, d.h. $\alpha \in U''$.

Sei nun $\alpha \in U''$. Wir schreiben α als $\sum_{i=1}^n b_i \alpha_i$. Weil $v_{m+1}, \ldots, v_n \in U'$ liegen, gelten $\alpha(v_{m+1}) = b_{m+1} = 0, \ldots, \alpha(v_n) = b_n = 0$, also ist $\alpha = \sum_{i=1}^m b_i \alpha_i \in \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_m \rangle_K = U$.

c) Sei $V = K^{\oplus \mathbb{N}}$. Wir definieren $\alpha_i \in V^*$ durch $\alpha_i((a_k)_{k \in \mathbb{N}}) = a_i$ und wir setzen $U = \langle \{\alpha_i \mid i \in \mathbb{N}\} \rangle_K \subseteq V^*$. Dann ist $U' = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \ker \alpha_i$. Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in U'$, dann gilt $\alpha_i((a_k)_{k \in \mathbb{N}}) = a_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$, also ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ die Nullfolge, d.h., $U' = \{0\}$.

Sei nun $\alpha \in V^*$, dann gilt $\alpha(U') = \alpha(\{0\}) = \{0\}$, also $V^* = U''$; aber $V^* \neq U$ weil z.B. $\alpha \colon V \to K$, $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto \sum_{i=0}^{+\infty} a_i$ in $V^* \setminus U$ liegt.

Aufgabe 2.

a) $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

b) Es gilt $v = \alpha_1(v) v_1 + \alpha_2(v) v_2 + \alpha_3(v) v_3 = \frac{5}{2} v_1 + 3 v_2 + -\frac{3}{2} v_3$.

Aufgabe 3.

a) Aus Satz 8.2.16 folgt, dass f bijektiv ist gdw. f^* bijektiv ist.

b) Sei $\beta := g(\alpha) \in W^*$. Per Definition von f^* gilt $\beta(f(v)) = [\beta \circ f](v) = [f^*(\beta)](v)$. Aber $f^*(\beta) = f^*(g(\alpha)) = \alpha$. Also gilt $[g(\alpha)](f(v)) = \beta(f(v)) = [f^*(\beta)](v) = \alpha(v)$.

c) Seien $\beta \in W^*$ und $v \in V$, dann gilt $[f^*(\beta)](v) = [\beta \circ f](v) = \beta(av) = a\beta(v)$, also $f^*(\beta) = a\beta$. Dann ist g definiert durch $g(\alpha) = \frac{1}{a}\alpha$.

Aufgabe 4.

a) Seien $w, w' \in V$ und $\lambda \in K$. Dann gilt $\langle v, \lambda w + w' \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$ weil der Skalarprodukt linear bezüglich die zweite Eintrag ist.

b) $f(v) = v^T$.

c) Seien $v, v', w \in V$ und $\lambda \in K$. Dann gilt $[f(\lambda v + v')](w) = \langle \lambda v + v', w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle = [\lambda f(v) + f'(v)](w)$ weil der Skalarprodukt linear bezüglich die erste Eintrag ist.

d) Es gilt $[f(v_i)](v_j) = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ weil $v_1, \ldots, v_n$ othonormal ist.

e) Bem. 8.2.12 sagt, dass für jede $v \in V$ gilt, dass $v = \sum_{i=1}^n f(v_i)(v)v_i = \sum_{i=1}^n \langle v_i, v \rangle v_i$.

f) Jedes Element von V^* lasst sich eindeutig als $\sum_{i=1}^n b_i f(v_i) = f(\sum_{i=1}^n b_i v_i)$ schreiben, also in der Form $\langle v, \cdot \rangle$ mit $v = \sum_{i=1}^n b_i v_i$.

g) Seien $v, w \in V$. Per Definition von g^* gilt $[g^*(f(v))](w) = [f(v) \circ g](w) = [f(v)](g(w)) = \langle v, g(w) \rangle$.

h) Sei $v' \in V$ sodass die Abbildung $w \mapsto \langle v, g(w) \rangle$ gleich die Abbidlung $\langle v', \cdot \rangle$ ist. D.h., für alle $w \in V$ gilt $\langle v, g(w) \rangle = \langle v', w \rangle$. Sei g^* die adjunktiere Endomorphismus. Dann nehmen wir $v' = g^*(v)$.

i) Sei g^* die duale Morphismus von g und seien $v, w \in V$. Dann gilt $[g^*(f(v))](w) = \langle v, g(w) \rangle$. Sei nun g^* die adjunktiere Abbildung von g. Dann gilt $\langle v, g(w) \rangle = \langle g^*(v), w \rangle = [f(g^*(v))](w)$. Daraus folgt $g^*(f(v)) = f(g^*(v))$ wobei g^* die adjunktiere oder die duale Morphismus ist.

j) Dann gilt $g^* = g^*$, d.h., die adjunktiere Morphismus gleich die duale Morphismus ist.