Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Sommersemester 2025

Linear Algebra II
Übungsblatt 11
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) Sei h die folgende Abbildung:

$$h\colon \begin{array}{ccc} \mathrm{Abb}(U\times V,W) & \to & \mathrm{Abb}(U,\mathrm{Abb}(V,W)) \\ \beta & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} U & \to & \mathrm{Abb}(V,W) \\ u & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} V & \to & W \\ v & \mapsto & \beta(u,v)\end{array}\right)\end{array}\right)\end{array}$$

Sei auch $\widetilde{h}$ die folgende Abbildung:

$$\widetilde{h}\colon \begin{array}{ccc} \mathrm{Abb}(U,\mathrm{Abb}(V,W)) & \to & \mathrm{Abb}(U\times V,W) \\ f & \mapsto & \left(\begin{array}{ccc} U\times V & \to & W \\ (u,v) & \mapsto & [f(u)](v)\end{array}\right)\end{array}$$

Wir zeigen, dass $h\circ\widetilde{h}=\mathrm{id}_{\mathrm{Abb}(U,\mathrm{Abb}(V,W))}$ und $\widetilde{h}\circ h=\mathrm{id}_{\mathrm{Abb}(U\times V,W)}$ gelten.

Sei $f\in\mathrm{Abb}(U,\mathrm{Abb}(V,W))$ und seien $u\in U$, $v\in V$ beliebige. Dann gilt $[[h(\widetilde{h}(f))](u)](v)=\widetilde{h}(f))(u,v)$ per Definition von h. Per Definition von $\widetilde{h}$ gilt nun $\widetilde{h}(f))(u,v)=[f(u)](v)$. D.h., für alle $v\in V$, alle $u\in U$ und alle $f\in\mathrm{Abb}(U,\mathrm{Abb}(V,W))$ gilt $[[h(\widetilde{h}(f))](u)](v)=[f(u)](v)$, also die Abbildungen $h(\widetilde{h}(f))](u)$ und $f(u)$ sind gleich für alle $u\in U$ und alle $f\in\mathrm{Abb}(U,\mathrm{Abb}(V,W))$, also die Abbildungen $h(\widetilde{h}(f))$ und f sind gleich für alle $f\in\mathrm{Abb}(U,\mathrm{Abb}(V,W))$, d.h., $h\circ\widetilde{h}=\mathrm{id}_{\mathrm{Abb}(U,\mathrm{Abb}(V,W))}$.

Sei nun $\beta\in\mathrm{Abb}(U\times V,W)$ und seien $u\in U$, $v\in V$ beliebige. Es folgt analog aus der Definition der h und $\widetilde{h}$, dass $\widetilde{h}(h(\beta))(u,v)=\beta(u,v)$, also $\widetilde{h}\circ h=\mathrm{id}_{\mathrm{Abb}(U\times V,W)}$.

Also h und $\widetilde{h}$ sind Inversen von ein anders, und sind insbesondere bijektiv.

b) Sei nun $H=h|_{\mathrm{Bil}(U\times V,W)}$ und $\widetilde{H}=\widetilde{h}|_{\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W))}$. Wir wollen zeigen:

- $\operatorname{im}\widetilde{H}\subseteq\mathrm{Bil}(U\times V,W)$, d.h., für alle $f\in\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W))$, $\widetilde{H}(f)$ ist bilinear.
- $\operatorname{im}H\subseteq\mathrm{Hom}(U,\mathrm{Hom}(V,W))$, d.h., für alle $\beta\in\mathrm{Bil}(U\times V,W)$, $H(\beta)$ ist linear (als Abbildung von U nach $\mathrm{Abb}(V,W)$), und für alle $u\in U$, $[H(\beta)](u)$ ist linear (als Abbildung von V nach W).
- H ist linear als Abbildung von $\mathrm{Bil}(U\times V,W)$ nach $\mathrm{Abb}(U,\mathrm{Abb}(V,W))$.

Aufgabe 2.

a) Sei $v_2=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ und $\alpha_1=\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}$. Dann gilt $\alpha_1v_1=a+2b=1$, $\alpha_1v_2=ax+by=0$, und $\alpha_2v_2=2x-y=1$. Also z.B. $v_2=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ und $\alpha=\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$.

b) Es gibt unendliche viele Möglichkeiten, um v_2 zu Wählen; wenn wir setzen x, dann kennen wir y aus $2x - y = 1$, und dann (a, b) ist die eindeutig Lösung von $ax + by = 0$ und $a + 2b = 1$, also dann gibt es nut 1 Möglichkeit, um α_1 zu wählen.

Aufgabe 3.

a) Ja, $[f(v)](w) \in K$.

b) Nein, da $v \notin V^*$.

c) Ja, $f \circ g^* \in \mathrm{End}(W^*)$.

d) Nein, da $v \notin \mathrm{Hom}(V, V)$.

e) Nein, da $\mathrm{id}_W \notin V$.

f) Ja, $[f(\mathrm{id}_V)](w) \in W$.

g) Ja, $\alpha \circ \beta \in \mathrm{Bil}(W \times W, K)$.

Aufgabe 4.

a) Seien $w, w' \in W$, $\alpha, \alpha' \in V^*$, $\lambda \in K$, und $v \in V$. Es gilt $f_{\lambda w + w', \alpha}(v) = \alpha(v) \cdot (\lambda w + w') = \lambda\alpha(v)w + \alpha(v)w' = \lambda f_{w,\alpha}(v) + f_{w',\alpha}(v) = [\lambda f_{w,\alpha} + f_{w'\alpha}](v)$, also ist f linear bezüglich seine W-Eintrag. Es gilt auch $f_{w,\lambda\alpha+\alpha'}(v) = [\lambda\alpha + \alpha'](v)w = \lambda\alpha(v)w + \alpha'(v)w = \lambda f_{w,\alpha}(v) + f_{w,\alpha'}(v) = [\lambda f_{w,\alpha} + f_{w,\alpha'}](v)$, also ist f linear bezüglich seine V^*-Eintrag, und f ist bilinear.

b) Sei A die Matrix von f_{e_i,α_j}. Dann ist $A_{ij} = 1$ und $A_{i'j'} = 0$ für alle $(i', j') \neq (i, j)$.

c) Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Sei $v_1, \ldots, v_n \in V$ die Duale Basis zu $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Für $i \in \{1, \ldots, n\}$, weil $f(v_i) \in W$ liegt, lässt er eindeutig als $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} w_j$ schreiben. Es gilt also $f = \sum_{b_{ij}} f_{w_i,\alpha_j}$, also jede $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ lässt sich eindeutig als Linearkombination von f_{w_i,α_j} schreiben, d.h., die Vektoren f_{w_i,α_j} bilden eine Basis von $\mathrm{Hom}(V, W)$.

d) Aus Lemma 8.3.6 folgt, dass $V^* \otimes W = \mathrm{Hom}(V, W)$ ist.

e) Wenn $w = 0$ oder $\alpha = 0$, dann gilt $f_{w,\alpha} = 0$ und hat Rang 0. Wenn nicht, dann im $f_{w,\alpha} = \langle w \rangle_K$, also hat Rang 1.

f) Wenn $\mathrm{rk}(f) = 0$, Dann $f = f_{0,0}$. Wenn $\mathrm{rk}(f) = 1$, dann wählen wir $w \in \mathrm{im}\, f \setminus \{0\}$. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann gilt es $f(v_i) = b_i w$, und wir definieren $\alpha \in V^*$ durch $\alpha(v_i) = b_i$, sodass $f = f_{w,\alpha}$ gilt.