Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Sommersemester 2025

Linear Algebra II
Übungsblatt 12
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) Seien $v_1 \in V_1 \setminus \{0\}$ und $v_2 \in V_2 \setminus \{0\}$. Seien auch $B_1 \subseteq V_1$ eine Basis von V_1 und $B_2 \subseteq V_2$ eine Basis von V_2. Dann existieren $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in K$, $u_1, \ldots, u_n \in B_1$ und $w_1, \ldots, w_m \in B_2$ sodass $v_1 = \sum_{i=1}^n a_i u_i$ und $v_2 = \sum_{j=1}^m b_j w_j$. Es gilt nun $v_1 \otimes v_2 = \sum_{i=1}^n a_i (u_i \otimes (\sum_{j=1}^m b_j w_j)) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j (u_i \otimes w_j)$.

   Weil $v_1 \neq 0$, es gibt mindestens ein $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ sodass $a_{i_0} \neq 0$. Analog, es gibt $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ sodass $b_{j_0} \neq 0$.

   Weil $\{u \otimes w \mid u \in B_1, w \in B_2\}$ eine Basis von $V_1 \otimes V_2$ ist, ist insbesondere die Menge $\{u_i \otimes w_j \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\}$ linear unabhängig. Weil $a_{i_0} b_{j_0} \neq 0$, gilt $v_1 \otimes v_2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j (u_i \otimes w_j) \neq 0$.

   D.h., $v_1 \neq 0 \wedge v_2 \neq 0$ impliziert $v_1 \otimes v_2 \neq 0$, oder $v_1 \otimes v_2 = 0$ impliziert $v_1 = 0 \vee v_2 = 0$.

b) Seien $v_1, v_1' \in V_1 \setminus \{0\}$ und $v_2, v_2' \in V_2 \setminus \{0\}$ sodass $v_1 \otimes v_2 = v_1' \otimes v_2'$. Weil $v_1 \neq 0$ ist, existiert eine Basis B_1 von V_1, die v_1 enthält. Analog existiert eine Basis B_2 von V_2, die v_2 enthält. Da $v_1' \in V_1$ liegt, existieren $r, r', a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \in K$, $u_1, \ldots, u_n \in V_1$ und $w_1, \ldots, w_m \in V_2$, sodass $v_1' = rv_1 + \sum_{i=1}^n a_i u_i$ und $v_2' = r' v_2 + \sum_{j=1}^m b_j w_j$ gelten.

   Weil $v_1 \otimes v_2 = v_1' \otimes v_2'$ ist, gilt

$$0 = v_1 \otimes v_2 - v_1' \otimes v_2' = (1 - rr') v_1 \otimes v_2 - (r \sum_{j=1}^m b_j (v_1 \otimes w_j) + r' \sum_{i=1}^n a_i (u_i \otimes v_2) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j (u_i \otimes w_j))$$

   Aber $\{v_1 \otimes v_2, v_1 \otimes w_j, u_i \otimes v_2, u_i \otimes w_j \mid 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m\}$ ist linear unabhängig, also gilt $(1 - rr') = 0$, $rb_j = 0$, $r' a_i = 0$, $a_i b_j = 0$ für alle $1 \leqslant i \leqslant n$ und $1 \leqslant j \leqslant m$. Daraus folgt $1 = rr'$, also sind r und r' nicht Null und $r' = \frac{1}{r}$; und $rb_j = 0$ impliziert $b_j = 0$ und $r' a_i = 0$ impliziert $a_i = 0$.

   Zuletzt haben wir $v_1' = rv_1 + 0$ und $v_2' = r' v_2 + 0 = \frac{1}{r} v_2$.

Aufgabe 2.

a) Seien $\alpha \in (K^n)^*$ und $w \in K^m$. Sei $f_{w,\alpha} \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ definiert durch $f_{w,\alpha}(v) = \alpha(v) w$.

   Sei nun $A = w \cdot \alpha \in K^{m \times n}$. Dann gilt, für alle $v \in K^n$, dass $A \cdot v = (w \cdot \alpha) \cdot v = w \cdot (\alpha \cdot v)$. Aber $\alpha \cdot v \in K$, also $Av = (\alpha \cdot v) w = f_{w,\alpha}(v)$.

b) A kann nicht als $\alpha \otimes w$ geschrieben sein: seien $\alpha = \begin{pmatrix} abc \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ so dass $A = \alpha \otimes w$. Dann gilt $ax = 1$, also $a \neq 0$; $cz = 1$, also $z \neq 0$; und $az = 0$, ein Widerspruch.

Es gilt aber $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} +$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3.

a) $\alpha(e_1 \otimes e_1) = 5$, $\alpha(e_1 \otimes e_2) = -1$, $\alpha(e_2 \otimes e_1) = -1$, $\alpha(e_2 \otimes e_2) = 2$

b) $\alpha(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}) = 5a_{11} - a_{12} - a_{21} + 2a_{22}$.

Aufgabe 4.

a) Wir suchen eine Abbidlung β, die bilineare ist, die von $V \times (W_1 \oplus W_2)$ nach $(V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2)$ geht, und die so ist, dass die Abbildung $H_U\colon \operatorname{Hom}((V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2), U) \to \operatorname{Bil}(V \times (W_1 \oplus W_2), U)$, $g \mapsto g \circ \beta$ bijektiv ist für alle K-Vektorraum U. Dann wird $v \otimes (w_1, w_2) = \beta(v, (w_1, w_2))$ sein, also wir brauchen auch, dass $\beta(v, (w_1, w_2)) = (v \otimes w_1, v \otimes w_2)$ gilt.

b) Sei $\beta\colon V \times (W_1 \oplus W_2) \to (V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2)$ definiert durch $\beta(v, (w_1, w_2)) = (v \otimes w_1, v \otimes w_2)$.

- β ist bilineare: seien $v, v' \in V$, $w_1, w_1' \in W_1$, $w_2, w_2' \in W_2$ und $\lambda \in K$.
  Es gilt $\beta(\lambda v + v', (w_1, w_2)) = ((\lambda v + v') \otimes w_1, (\lambda v + v') \otimes w_2) = (\lambda(v \otimes w_1) + v' \otimes w_1, \lambda(v \otimes w_2) + v' \otimes w_2) = (\lambda(v \otimes w_1), \lambda(v \otimes w_2)) + (v' \otimes w_1, v' \otimes w_2) = \lambda(v \otimes w_1, v \otimes w_2) + (v' \otimes w_1, v' \otimes w_2) = \lambda\beta(v, (w_1, w_2)) + \beta(v', (w_1, w_2))$.
  Es gilt auch $\beta(v, \lambda(w_1, w_2) + (w_1', w_2')) = \cdots = \lambda\beta(v, (w_1, w_2)) + \beta(v, (w_1', w_2'))$.
- Sei U ein K-Vektorraum und seien $g_1, g_2 \in \operatorname{Hom}((V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2), U)$ sodass $g_1 \circ \beta = g_2 \circ \beta$. Seien $v \in V$, $w_1 \in W_1$ und $w_2 \in W_2$. Dann gilt $g_1(\beta(v, (w_1, w_2))) = g_1(v \otimes w_1, v \otimes w_2) = g_2(v \otimes w_1, v \otimes w_2)$. Seien B, B_1 und B_2 Basen von V, W_1 und W_2. Dann ist $\{(u \otimes w, 0) \mid u \in B, w \in W_1\} \cup \{(0, u \otimes w) \mid u \in B, w \in W_2\}$ eine Basis von $(V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2)$. g_1 und g_2 sind identisch über diese Basis, also sind sie gleich aus Linearität. D.h., die Abbildung H_U ist injektiv.

- Sei U ein K-Vektorraum und sei $f \in \mathrm{Bil}(V \times (W_1 \oplus W_2), U)$. Wir betrachten nochmal Basen B, B_1 und B_2 von V, W_1 und W_2. Dann definieren $g \in \mathrm{Hom}((V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2), U)$ durch $g(u \otimes w, 0) = f(u, (w, 0))$ für $u \in B$ und $w \in B_1$, und $g(0, u \otimes w) = f(u, (0, w))$ für $u \in B$ und $w \in B_2$.

  Sei $u \in B$, $w_1 \in B_1$ und $w_2 \in B_2$. Dann gilt $g(\beta(u, (w_1, 0))) = g(u \otimes w_1, 0) = f(u, (w_1, 0))$ und $g(\beta(u, (0, w_2))) = g(0, u \otimes w_2) = f(u, (0, w_2))$, also f und $g \circ \beta$ sind identisch über eine Basis, also sind sie gleich aus Bilinearität. D.h., H_U ist surjektiv.

Aufgabe 5. Sei $\gamma\colon V_1 \times V_2 \times V_3 \to W$ multilineare. Seien B_1, B_2 und B_3 Basen von V_1, V_2 und V_3. Sei $g\colon V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \to W$ linear, definiert über die Basis $\{v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \mid v_1 \in B_1, v_2 \in B_2, v_3 \in B_3\}$ durch $g(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = \gamma(v_1, v_2, v_3)$.

g existiert und ist eindeutig, da sie ist definiert über eine Basis. Sei nun $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2, v_3 \in V_3$. Wir schreiben v_1 als $\sum_{i_1}^n a_i u_{1,i}$ mit $a_i \in K$ und $u_{1,i} \in V_1$, v_2 als $\sum_{i=1}^m b_i u_{2,i}$ mit $b_i \in K$ und $u_{2,i} \in V_2$, und v_3 als $\sum_{i=1}^n c_i u_{3,i}$ mit $c_i \in K$ und $u_{3,i} \in V_3$. Dann gilt $g(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) = g(\sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} a_i b_j c_k (u_{1,i} \otimes u_{2,j} \otimes u_{3,k})) = \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} a_i b_j c_k g(u_{1,i} \otimes u_{2,j} \otimes u_{3,k}) = \sum_{1 \leqslant i,j,k \leqslant n} a_i b_j c_k \gamma(u_{1,i}, u_{2,j}, u_{3,k}) = \gamma(\sum_{i=1}^n a_i u_{1,i}, \sum_{i=1}^m b_i u_{2,i}, \sum_{i=1}^n c_i u_{3,i}) = \gamma(v_1, v_2, v_3)$.