Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Sommersemester 2025

Linear Algebra II
Übungsblatt 14
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) Sei $g\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^6$ definiert durch $g(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{13} \\ c_{14} \\ c_{23} \\ c_{24} \\ c_{34} \end{pmatrix}$ mit $c_{ij} = a_i b_j - b_i a_j$.

g ist bilinear:

Also existiert $\hat{g} \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4, \mathbb{R}^6)$ sodass $\hat{g}(v \otimes w) = g(v, w)$.

Sei $U = \langle \{v \otimes v \mid v \in \mathbb{R}^4\} \rangle_{\mathbb{R}}$. Dann gilt $\mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4 \otimes \mathbb{R}^4 / U$.

Sei $v \in \mathbb{R}^4$, dann gilt $\hat{g}(v \otimes v) = g(v, v) = 0$, d.h, $g(U) = \{0\}$. Also definieren wir $f\colon \mathbb{R}^4 \wedge \mathbb{R}^4$ durch $f(v \wedge w) = \hat{g}(v, w)$, und f ist wohldefiniert und linear.

b) Es gilt $f(e_1 \wedge e_2) = e_1$, $f(e_1 \wedge e_3) = e_2$, $f(e_1 \wedge e_4) = e_3$, $f(e_2 \wedge e_3) = e_4$, $f(e_2 \wedge e_4) = e_5$, und $f(e_3 \wedge e_4) = e_6$, also f ist bijektiv.

c) Seien $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$. Angenommen, dass $f(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Wenn $a_1 = 0$, dann folgt $a_1 b_2 - a_2 b_1 = -a_2 b_1 = 1$, also $b_1 \neq 0$, und $a_1 b_3 - a_3 b_1 = -a_3 b_1 = 0$, also $a_3 = 0$, und $a_1 b_4 - a_4 b_1 = -a_4 b_1 = 0$, also $a_4 = 0$. Es gilt zuletzt $a_3 b_4 - a_4 b_3 = 1$, aber $a_3 = a_4 = 0$, eine Widerspruch. D.h., $a_1 \neq 0$.

Sei $\lambda = \frac{b_1}{a_1}$. Es gilt $\lambda a_1 = b_1$. Aus $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ folgt, dass $\lambda a_2 = b_2$. Aus $a_1 b_3 - a_3 b_1 = 0$ folgt, dass $\lambda a_3 = b_3$. Zuletzt aus $a_1 b_4 - a_4 b_1 = 0$ folgt, dass $\lambda a_4 = b_4$. Also gilt $\lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = 0$, daraus folgt $f(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix}, \wedge \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}) = 0$, eine Widerspruch.

Aufgabe 2.

a) Wir betrachten $\bigwedge^\ell h^{-1}\colon \bigwedge^\ell W \to \bigwedge^\ell V$.

Seien $v_1, \ldots, v_\ell \in V$. Dann gilt $\bigwedge^\ell h^{-1}(\bigwedge^\ell h(v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell)) = \bigwedge^\ell h^{-1}(h(v_1) \wedge \cdots \wedge h(v_\ell)) = h^{-1}(h(v_1)) \wedge \cdots \wedge h^{-1}(h(v_\ell)) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_\ell$, d.h., $\bigwedge^\ell h^{-1} \circ \bigwedge^\ell h = \mathrm{id}_{\bigwedge^\ell V}$.

Analog ist $\bigwedge^\ell h \circ \bigwedge^\ell h^{-1} = \mathrm{id}_{\bigwedge^\ell W}$, d.h., $\bigwedge^\ell h^{-1}$ ist das Invers von $\bigwedge^\ell h$, die ein Isomorphismus ist.

b) Sei $h\colon K^n \to V$ ein Isomorphismus und sei $f \in \operatorname{End}(V)$. Sei auch A die Matrix von $h^{-1} \circ f \circ h \in \operatorname{End}(K^n)$. Dann ist per Definition $\det f$ gleich $\det A$.

Wir betrachten nun $\bigwedge^n f \in \operatorname{End}(\bigwedge^n V)$. Es gilt $f = h \circ h^{-1} \circ f \circ h \circ h^{-1}$, also $\bigwedge^n f = \bigwedge^n (h \circ h^{-1} \circ f \circ h \circ h^{-1}) = \bigwedge^n h \circ \bigwedge^n (h^{-1} \circ f \circ h) \circ \bigwedge^n h^{-1}$. Aber $\bigwedge^n (h^{-1} \circ f \circ h) = \bigwedge^n A \in \operatorname{End}(\bigwedge^n K^n) = \det A \cdot \mathrm{id}_{\bigwedge^n K^n}$. Daraus folgt $\bigwedge^n f = \bigwedge^n h \circ (\det A \, \mathrm{id}_{\bigwedge^n K^n}) \circ \bigwedge^n h^{-1} = \det A (\bigwedge^n h \circ \bigwedge^n h^{-1}) = \det A \, \mathrm{id}_{\bigwedge^n V}$.

Aufgabe 3. $\det \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -2 + 6 - 2 = 2.$

$\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2 + 4 = 2.$

Also $x_1 = \frac{2}{2} = 1$.

Aufgabe 4.

a) Aus Satz 8.4.13 folgt, dass $\dim(\bigwedge^3 \mathbb{R}^3) = \binom{3}{3} = 1$. Da $\bigwedge^3 \mathbb{R}^3 = (\mathbb{R}^3)^{\otimes 3}/U_3$ ist, gilt $1 = \dim(\bigwedge^3 \mathbb{R}^3) = \dim((\mathbb{R}^3)^{\otimes 3}) - \dim(U_3) = 3^3 - \dim(U_3) = 9 - \dim(U_3)$, also $\dim(U_3) = 8$.

b) Die Vektoren $e_1 \otimes e_1$, $e_2 \otimes e_2$ und $(e_1 + e_2) \otimes (e_1 + e_2)$ sind in U_2 und sind linear unabhängig: Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ sodass $ae_1 \otimes e_1 + be_2 \otimes e_2 + c(e_1 + e_2) \otimes (e_1 + e_2) = 0$. Dann gilt $(a+c)e_1 \otimes e_1 + (b+c)e_2 \otimes e_2 + ce_1 \otimes e_2 + ce_2 \otimes e_1 = 0$. Da $\{e_i \otimes e_j \mid 1 \leqslant i, j \leqslant 2\}$ eine Basis von $(\mathbb{R}^2)^{\otimes 2}$ ist, gilt $a + c = 0$, $b + c = 0$, und $c = 0$. Daraus folgt $a = b = c = 0$ und die Vektoren sind linear unabhängig.