Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Sommersemester 2025

Linear Algebra II
Übungsblatt 2
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

⇐: Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Angenommen, dass eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert mit $A = B^T\overline{B}$. Es gilt $\overline{A}^T = \overline{(B^T\overline{B})}^T = \overline{\overline{B}}^T\overline{B}^{T^T} = B^T\overline{B} = A$. D.h., A ist hermitesche.
Sei nun $v \in \mathbb{C}^n$. Also ist $v^TA\overline{v} = v^TB^T\overline{B}\overline{v} = (Bv)^T \cdot \overline{(Bv)}$. Es gilt $Bv \in \mathbb{C}^n$, also gilt $(Bv)^T \cdot \overline{(Bv)} = \langle Bv, Bv\rangle \geqslant 0$, wobei $\langle \cdot, \cdot\rangle$ das standard Skalarprodukt in $\mathbb{C}^n$ ist. D.h., A ist positiv semidefinit.

⇒: Sei $D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesche, diagonal, und positiv semidefinit. Wir setzen $D = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$. Weil D positiv semidefinit ist, gilt $e_i^TDe_i = a_i \geqslant 0$.
Also existiert $\sqrt{a_i}$ in $\mathbb{R}$, und wir setzen $B = \begin{pmatrix} \sqrt{a_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{a_n} \end{pmatrix}$. Dann gilt $D = B^T\overline{B}$.
Sei nun A hermitesche und positiv semidefinit. Aus 6.5.6 folgt, dass eine unitäre Matrix $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert mit $S^{-1}AS$ diagonal. Wir setzen $D = S^{-1}AS$. Weil S unitäre ist, gilt $S^{-1} = \overline{S}^T$, und $\overline{D}^T = \overline{(S^{-1}AS)}^T = \overline{S}^T\overline{A}^TS = S^{-1}AS = D$, da A hermitesche ist. D.h., D ist hermitesche.
Sei nun $v \in \mathbb{C}^n$. Wir haben $v^TD\overline{v} = v^TS^{-1}AS\overline{v}$. Also $v^TD\overline{v} = v^T\overline{S}^TAS\overline{v} = (\overline{S}v)^TA\overline{(\overline{S}v)} \geqslant 0$ weil A positiv semidefinit ist.
D.h., D ist hermitesche, diagonal, und positiv semidefinit; aus dem, was wir oben geschrieben haben, folgt, dass $B_0 \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert mit $D = B_0^T\overline{B_0}$. Sei $B = B_0S^T$. Also haben wir $A = SDS^{-1} = SB_0^T\overline{B_0S}^T = (B_0S^T)^T\overline{(B_0S^T)} = B^T\overline{B}$.

Aufgabe 2.

a)
- $\det(A_1) = \det(1) = 1 > 0$,
- $\det(A_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 1 > 0$,
- $\det(A_3) = \det(A) = -17 < 0$: A ist nicht positiv definit.

b) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_2-2Z_1\to Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_2-2S_1\to S_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{Z_3-3Z_1\to Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3-3S_1\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3+3Z_2\to Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3+3S_2\to S_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -17 \end{pmatrix}.$$

Nicht alle diagonale Einträge sind positiv, also ist A nicht positiv definit.

Aufgabe 3.

a) $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 2\cos(\alpha)\lambda + 1$. $\Delta = 4\cos^2(\alpha) - 4 = -4\sin^2(\alpha) \leqslant 0$, also sind die Nullstellen von χ_A gleich $\frac{2\cos(\alpha)\pm 2i\sin(\alpha)}{2} = e^{\pm i\alpha}$. D.h., die EW von A haben Modul 1.

   Die Vektoren $v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ sind EV und bilden eine ONB von $\mathbb{C}^2$.

   Es gilt auch $AA^T = I$, also ist A jedoch unitäre.

b) Sei A unitäre. Insbesondere ist A normal. Aus den Spektralsatz 6.5.3 folgt, dass eine ONB von $\mathbb{C}^n$ existiert, die nur EV von A enthält. Also $v_1, \ldots, v_n$ sind ONB und es gibt $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, sodass $Av_i = \lambda_i v_i$ gilt für $i \in \{1, \ldots, n\}$.

   Jetzt haben wir $1 = \langle v_i, v_i\rangle = \langle v_i, A^*Av_i\rangle = \langle Av_i, Av_i\rangle = \langle \lambda v_i, \lambda v_i\rangle = \lambda_i\overline{\lambda_i}\langle v_i, v_i\rangle = |\lambda_i|$.

c) Sei $v_1, \ldots, v_n$ ONB von $\mathbb{C}^n$, sodass $Av_i = \lambda_i v_i$ mit $|\lambda_i| = 1$. Sei $M = (v_1|\ldots|v_n) \in \mathbb{C}^n$. M ist unitäre, da $\overline{M}^T M = (\overline{v_i}^T v_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n} = I$. Wir setzen $D := M^*AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$. D ist unitäre, als $D\overline{D}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1\overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\overline{\lambda_n} \end{pmatrix} = I$. Also ist $A = MDM^*$ auch unitäre, da ein Produkt von unitäre Matrizen unitär ist.

Aufgabe 4.

a) Zu zeigen:

   - $\mathrm{Hom}(V, K)$ ist abgeschlossen unter $+$
   - $+$ ist assoziativ auf $\mathrm{Hom}(V, K)$
   - Es existiert ein neutral Element für $+$ in $\mathrm{Hom}(V, K)$
   - Jeder Element in $\mathrm{Hom}(V, K)$ hat ein Inverses in $\mathrm{Hom}(V, K)$
   - $+$ ist kommutativ in $\mathrm{Hom}(V, K)$
   - $\mathrm{Hom}(V, K)$ ist abgeschlossen unter $\cdot$, also für alle $\lambda \in K$ und $f \in \mathrm{Hom}(V, K)$, gilt $\lambda \cdot f \in \mathrm{Hom}(V, K)$
   - $\cdot$ ist assoziativ auf $K \times K \times \mathrm{Hom}(V, K)$, also für alle $\lambda, \mu \in K$ und $f \in \mathrm{Hom}(V, K)$, gilt $(\lambda \cdot \mu) \cdot f = \lambda \cdot (\mu \cdot f)$
   - für alle $f \in \mathrm{Hom}(V, K)$ gilt $1 \cdot f = f$
   - Distributivität: für alle $\lambda, \mu \in K$ und $f, g \in \mathrm{Hom}(V, K)$ gilt $(\lambda+\mu)\cdot f = \lambda\cdot f+\mu\cdot g$ und $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$

b) Eine Abbildung $g\colon V \to \mathrm{Hom}(V, K)$ ist genau dann linear, wenn für alle $\lambda \in K$ und alle $v, v', w \in V$ gilt $[g(\lambda v + v')](w) = [\lambda g(v) + g(v')](w)$.

c) Seien $v, v', w \in V$ und $\lambda \in K$. Wir haben $\beta_g(\lambda v + v', w) = [g(\lambda v + v')](w) = [\lambda g(v) + g(v')](w)$, weil g linear ist. Per Definition von $+$ auf $\mathrm{Hom}(V, K)$ ist $[\lambda g(v) + g(v')](w) = [\lambda g(v)](w) + [g(v')](w)$. Per Definition von $\cdot$ auf $\mathrm{Hom}(V, K)$ ist $[\lambda g(v)](w) = \lambda[g(v)](w)$. Also haben wir $[\lambda g(v) + g(v')](w) = \lambda[g(v)](w) + [g(v')](w) = \lambda\beta_g(v, w) + \beta_g(v', w)$, also ist $v \mapsto \beta_g(v, w)$ linear für alle $w \in V$.

   Seien nun $v, w, w' \in V$ und $\lambda \in K$. Wir haben $\beta_g(v, \lambda w + w') = [g(v)](\lambda w + w')$. Per Definition von g liegt $g(v)$ in $\mathrm{Hom}(V, K)$, d.h., $g(v)$ ist linear und $[g(v)](\lambda w + w') = \lambda[g(v)](w) + [g(v)](w') = \lambda\beta_g(v, w) + \beta_g(v, w')$, also ist $w \mapsto \beta_g(v, w)$ linear für alle $v \in V$.

d) Seien $v, w, w' \in V$ und $\lambda \in K$. Es gilt $[g_\beta(v)](\lambda w + w') = \beta(v, \lambda w + w') = \lambda\beta(v, w) + \beta(v, w') = \lambda[g_\beta(v)](w) + [g_\beta(v)](w')$. D.h., $g_\beta(v)$ ist linear, also ein Element von $\mathrm{Hom}(V, K)$.

e) Seien $v, v', w \in V$ und $\lambda \in K$. Es gilt $[g_\beta(\lambda v + v')](w) = \beta(\lambda v + v', w) = \lambda\beta(v, w) + \beta(v', w) = \lambda[g_\beta(v)](w) + [g_\beta(v')](w) = [\lambda g_\beta(v) + g_\beta(v')](w)$. D.h., $g_\beta \colon V \to \mathrm{Hom}(V, K)$ ist linear.

f) Sei $g \colon V \to \mathrm{Hom}(V, K)$ linear und sei $v, w \in V$. Dann gilt $[g_{\beta_g}(v)](w) = \beta_g(v, w) = [g(v)](w)$, also $g(v) = g_{\beta_g}(v)$ für alle v, d.h., $g = g_{\beta_g}$. Analog gilt $\beta_{g_\beta} = \beta$ für alle bilinear Formen β. Also die Abbildung $\beta \mapsto g_\beta$ ist eine Bijektion und sein Inverses ist $g \mapsto \beta_g$.