

Linear Algebra II
Übungsblatt 3
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum.

Behauptung: Drei Untervektorräume U_1, U_2, U_3 existieren, sodass $U_1 \oplus U_2 = U_2 \oplus U_3 = U_3 \oplus U_1 = V$ gilt, gdw. $\dim(V)$ gerade ist.

Beweis: Angenommen, dass solche U_1, U_2, U_3 existieren. Dann gilt $\dim(V) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$ und $\dim(V) = \dim(U_2) + \dim(U_3)$, also $\dim(U_3) = \dim(U_1)$. Es gilt auch $\dim(V) = \dim(U_3) + \dim(U_1) = 2 \dim(U_1)$, also ist $\dim(V)$ gerade.

Angenommen nun, dass $\dim(V)$ gerade ist, also wir setzen $\dim(V) = 2n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Sei $v_1, \dots, v_{2n}$ eine Basis von V . Wir setzen $U_1 = \langle v_1, \dots, v_n \rangle_K$, $U_2 = \langle v_{n+1}, \dots, v_{2n} \rangle_K$, und $U_3 = \langle v_1 + v_{n+1}, \dots, v_n + v_{2n} \rangle_K$. Da $v_1, \dots, v_n$ linear unabhängige sind, gilt $\dim(U_1) = n$. Analog gilt $\dim(U_2) = n$. Zuletzt gilt $\dim(U_3) \leq n$, da U_3 durch n Vektoren erzeugt ist.

Alle die Vektoren v_i liegen in $U_1 + U_2$, also $V = U_1 + U_2$. Aber $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(V) = n + n - 2n = 0$, also $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und $U_1 \oplus U_2 = V$ gilt.

Sei $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann liegen $v_i \in U_1 + U_3$ und $v_{n+i} = -v_i + (v_i + v_{n+i}) \in U_1 + U_3$. Dann ist $U_1 + U_3 = V$. Es gilt aber $\dim(U_1 \cap U_3) = \dim(U_1) + \dim(U_3) - \dim(V) = \dim(U_3) - n \leq n - n = 0$, also ist $\dim(U_1 \cap U_3) = 0$ und $U_1 \oplus U_3 = V$ gilt.

Analog gilt $U_2 \oplus U_3 = V$.

b) In $\mathbb{F}_2^2$ gibt es nur drei Untervektorräume mit Dimension 1: $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$. Also vier solche Untervektorräume existieren nicht.

Behauptung: vier solche Untervektorräume existieren gdw. $\dim(V)$ gerade ist und entweder $K \neq \mathbb{F}_2$ oder $\dim(V) \neq 2$.

Beweis: Wenn $K \neq \mathbb{F}_2$: Wir setzen U_1, U_2 und U_3 wie oben. Sei nun $\lambda \in K \setminus \{0, 1\}$. Jetzt setzen wir $U_4 = \langle v_1 + \lambda v_{n+1}, \dots, v_n + \lambda v_{2n} \rangle_K$. Dann gilt $U_1 \oplus U_4 = U_2 \oplus U_4 = U_3 \oplus U_4 = V$.

Wenn $\dim(V) > 2$: Wir setzen U_1, U_2 und U_3 wie oben. Jetzt setzen wir $U_4 = \langle v_1 + v_2 + v_{n+1}, \dots, v_{n-1} + v_n + v_{2n-1}, v_n + v_1 + v_{2n} \rangle_K$. Dann gilt $U_1 \oplus U_4 = U_2 \oplus U_4 = U_3 \oplus U_4 = V$.

Aufgabe 2.

a) Sei $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} b_{ij} x_i x_j$ eine quadratische Form und

$$A = \begin{pmatrix} b_{11} & \frac{b_{12}}{2} & \dots & \frac{b_{1n}}{2} \\ \frac{b_{12}}{2} & b_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{b_{n-1,n}}{2} \\ \frac{b_{1n}}{2} & \dots & \frac{b_{n-1,n}}{2} & b_{nn} \end{pmatrix}$$

die Matrix, die durch die Koeffizienten von f definiert ist. Sei β_f die bilineare Form definiert durch $\beta_f(v, w) = v^T A w$.

Die Abbildung $f \mapsto \beta_f$ ist:

- injektiv: Seien f und g quadratische Formen mit $\beta_f = \beta_g$. Sei $v \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt $f(v) = \beta_f(v, v) = \beta_g(v, v) = g(v)$. Also sind f und g gleich.
- surjektiv: Sei β eine symmetrische bilineare Form. Dann ist $\beta(v, w) = v^T A w$ mit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ symmetrische. wir setzen $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{ij} x_i x_j$. Dann gilt $\beta_f = \beta$.

b) Sei $f : V \rightarrow W$ ein Isomorphismus, sodass $\|v\| = \|f(v)\|$ gilt für alle $v \in V$. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V .

Seien β_1, β_2 symmetrische bilineare Formen über $\mathbb{R}^n$ definiert durch $\beta_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) =$

$\langle x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, y_1 v_1 + \dots + y_n v_n \rangle$ und $\beta_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right) = \langle f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n), f(y_1 v_1 + \dots + y_n v_n) \rangle$. Aus a) folgt, dass die Abbildungen f_1, f_2 definiert durch

$f_i(x_1, \dots, x_n) = \beta_i\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$ quadratische Formen sind.

Aber $f_1(x_1, \dots, x_n) = \beta_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \langle x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, x_1 v_1 + \dots + x_n v_n \rangle = \|x_1 v_1 + \dots + x_n v_n\|^2$, und $f_2(x_1, \dots, x_n) = \|f(x_1 v_1 + \dots + x_n v_n)\|^2 = \|x_1 v_1 + \dots + x_n v_n\|^2$ da f die Längern erhält. Also sind f_1 und f_2 gleich, und aus a) folgt, dass auch $\beta_1 = \beta_2$ gilt.

Seien $v, w \in V$. Wir schreiben v, w in die Basis $v_1, \dots, v_n$, also $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ und $w = \sum_{i=1}^n b_i v_i$. Dann gilt $\langle v, w \rangle = \beta_1\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right) = \beta_2\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\right) = \langle f(v), f(w) \rangle$.

D.h., f ist eine Isometrie.

c) Es gilt $\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle v, w \rangle + \langle w, v \rangle + \langle w, w \rangle = 2\langle v, w \rangle + \|v\|^2 + \|w\|^2$, also $\langle v, w \rangle = \frac{\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2}{2}$.

Aufgabe 3. Es gilt $\beta\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = a^2 - b^2$, also $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \in U'$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in U'$; aber $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U'$.
 U' ist kein Vektorraum (also macht $\dim(U')$ kein Sinn).

Aufgabe 4.

- a) Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$ mit $a_i \in \{-1, 0, 1\}$ und $\beta(v, w) = v^T A w$. Seien $M_1 = \{i \mid a_i = 1\}$, $M_0 = \{i \mid a_i = 0\}$ und $M_{-1} = \{i \mid a_i = -1\}$. Dann setzen wir $U_1 = \langle (e_i)_{i \in M_1} \rangle_{\mathbb{R}}$, $U_0 = \langle (e_i)_{i \in M_0} \rangle_{\mathbb{R}}$, und $U_{-1} = \langle (e_i)_{i \in M_{-1}} \rangle_{\mathbb{R}}$. Weil die Vereinigung der Basen von U_i eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bildet, haben wir $\mathbb{R}^n = U_1 \oplus U_0 \oplus U_{-1}$.
- b) Sei $\beta: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear und symmetrisch, dann existiert eine Basis $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$ so dass $\beta(v_i, v_i) \in \{-1, 0, 1\}$ und $\beta(v_i, v_j) = 0$ wenn $i \neq j$.
 Seien $M_1 = \{i \mid \beta(v_i, v_i) = 1\}$, $M_0 = \{i \mid \beta(v_i, v_i) = 0\}$ und $M_{-1} = \{i \mid \beta(v_i, v_i) = -1\}$.
 Dann setzen wir $U_1 = \langle (v_i)_{i \in M_1} \rangle_{\mathbb{R}}$, $U_0 = \langle (v_i)_{i \in M_0} \rangle_{\mathbb{R}}$, und $U_{-1} = \langle (v_i)_{i \in M_{-1}} \rangle_{\mathbb{R}}$.
 Weil die Vereinigung der Basen von U_i eine Basis von $\mathbb{R}^n$ bildet, haben wir $\mathbb{R}^n = U_1 \oplus U_0 \oplus U_{-1}$.

Aufgabe 5.

- a) Seien $V = \mathbb{R}^2$ und $U_1 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$, $U_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ und $U_3 = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$. Es gilt $V = U_1 + U_2 + U_3$ und $U_1 \cap U_2 = U_2 \cap U_3 = U_3 \cap U_1 = \{0\}$, aber „ $V = (U_1 \oplus U_2) \oplus U_3$ “ gilt nicht, da $(U_1 \oplus U_2) \cap U_3 = U_3 \neq \{0\}$. Außerdem ist auch z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nicht eindeutig wie $v_1 + v_2 + v_3$ in $U_1 + U_2 + U_3$ beschreibbar: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
- b) Seien V ein K -Vektorraum und $U_1, \dots, U_n$ Untervektorräume.
 Wir setzen „(d)“ die Aussage „ $V = U_1 + \dots + U_n$ und $\dim(V) = \sum_{i=1}^n \dim(U_i)$ “.
 Für jeder i , sei $d_i = \dim(U_i)$ und $u_1^i, \dots, u_{d_i}^i$ eine Basis von U_i .

7.1.2.(c) $\Rightarrow$ (d). (c) sagt genau, dass $(u_j^i)_{1 \leq j \leq d_i}^{1 \leq i \leq n}$ eine Basis von V ist. Dann ist $\dim(V) = \#(u_j^i)_{1 \leq j \leq d_i}^{1 \leq i \leq n} = \sum_{i=1}^n d_i = \sum_{i=1}^n \dim(U_i)$. Jeder $u_j^i \in U_i$ liegt, also auch in $U_1 + \dots + U_n$; dann ist $V = U_1 + \dots + U_n$ und „(d)“ gilt.

(d) $\Rightarrow$ 7.1.2.(c). Angenommen, dass (d) gilt. Sei $v \in V$. Weil $V = U_1 + \dots + U_n$ gilt, kann v als $v_1 + \dots + v_n$ geschrieben sein, mit $v_i \in U_i$. Wir schreiben auch jeder v_i in die Basis $(u_j^i)_{1 \leq j \leq d_i}$ von U_i , also $v_i = \sum_{j=1}^{d_i} a_j^i u_j^i$. Dann ist $v = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{d_i} a_j^i u_j^i$, d.h., $(u_j^i)_{1 \leq j \leq d_i}^{1 \leq i \leq n}$ erzeugt V .

$(u_j^i)_{1 \leq j \leq d_i}^{1 \leq i \leq n}$ ist eine Menge von $d_1 + \dots + d_n$ Vektoren, die V erzeugen; weil $\dim(V) = d_1 + \dots + d_n$ gilt, ist auch $(u_j^i)_{1 \leq j \leq d_i}^{1 \leq i \leq n}$ eine Basis von V .