

Linear Algebra II
Übungsblatt 4
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

- a) Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V . Für jeder i existiert k_i sodass $f^{k_i}(v_i) = 0$. Sei $k = \max(k_1, \dots, k_n)$. Dann $f^k(v_i) = f^{k-k_i}(f^{k_i}(v_i)) = f^{k-k_i}(0) = 0$. D.h., f^k bildet eine Basis ab 0, oder $f^k = 0$.
- b) Sei $P \in \mathbb{R}[x]$. Es gilt $\deg(f(P)) \leq \deg(P) - 1$. Also $\deg(f^{\deg(P)+1}(P)) \leq \deg(P) - \deg(P) - 1 = -1$, d.h., $\deg(f^{\deg(P)+1}(P)) = -\infty$ und $f^{\deg(P)+1}(P) = 0$.
- Sei nun $k > 0$, es gilt $f^k(x^k) = k!$, also $f^k \neq 0$ für alle $k > 0$: f ist nicht nilpotent.

Aufgabe 2.

- a) **Wahr:** Sei $v_1, \dots, v_n$ eine ONB von U . Wir erlangern sie zu eine ONB $v_1, \dots, v_m$ von V . Sei $v \in V$. Dann schreiben wir v als $\sum_{i=1}^m a_i v_i$. Wir setzen $u = \sum_{i=1}^n a_i v_i \in U$ und $u' = v - u$. Dann ist $v = u + u'$, $u \in U$ und $u' \in U^\perp$, da für alle $i \leq n$ gilt, dass $\langle v_i, u' \rangle = 0$ ist. Also, $V = U + U'$.
- Es gilt auch $U \cap U^\perp = \{0\}$: sei $v \in U \cap U^\perp$. Dann $\langle v, v \rangle = 0$, d.h., $v = 0$.
- b) **Falsch:** Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit das standard Skalarprodukt. Sei $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ und $U' = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$. Es gilt $U \oplus U' = V$ aber $U' \neq U^\perp$.

Aufgabe 3.

- a) v_1, v_2 bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$; also, es gilt genau eine Matrix A sodass $Av_1 = v_2$ und $Av_2 = 0$.
- Dann gilt $A^2 v_1 = A(Av_1) = Av_2 = 0$ und $A^2 v_2 = A(Av_2) = 0$, d.h., $A^2 = 0$ und A ist nilpotent.
- b) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, dann $A^2 = 0$.
- c) Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Dann $A^2 = 0$, $B^2 = 0$, und $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht nilpotent.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ nilpotent, also $A^k = 0$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ EW von A , d.h., es gibt $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $Av = \lambda v$. Dann gilt $A^k v = \lambda^k v = 0$, also $\lambda = 0$.

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein EV von A mit EW 0 da $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5.

- a) $(I_n + A) \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i A^i = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i A^i + \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i A^{i+1} = (I_n - A + A^2 - \dots \pm A^{m-1}) + (A - A^2 + \dots \pm A^m) = I_n \pm A^m$. Weil $A^m = 0$, gilt $(I_n + A) \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i A^i = I_n$.
- b) Wenn $A^m = 0$ ist, gilt auch $(-A)^m = 0$, d.h., $-A$ ist nilpotent und $(I_n + A) \sum_{i=0}^{m-1} A^i = I_n$.

c) es gilt $B = I_n + A$ mit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. A ist nilpotent,

da $A^2 = 4 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = 8 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = 16 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

und $A^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt:

$$B^{-1} = (I_n + A)^{-1} = I_n - A + A^2 - A^3 + A^4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$