Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau HHU Düsseldorf
Sommersemester 2025

Linear Algebra II
Übungsblatt 5
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) Sei $U = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$. Da $A \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \in U$ und $A \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \in U$, haben wir $A \cdot U \subseteq U$, d.h., U ist A-invariant.

b) U ist f-invariant: Per Definition von U gilt $f(f^k(v)) \in U$ für $k \in \{0, \dots, n-2\}$. Wir wollen zeigen, dass auch $f(f^{n-1}(v)) = f^n(v) \in U$ liegt.

Entweder $\dim(U) = n$, dann ist $U = V$ und $f^n(v) \in V = U$; oder $\dim(U) < n$, dann existieren $a_0, \dots, a_{n-1} \in K$, nicht alle 0, mit $\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i(v) = 0$. Sei $k \in \{0, \dots, n-1\}$ maximal sodass $a_k \neq 0$, also haben wir $f^k(v) = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{a_k} f^i(v)$. Dann gilt $f^n(v) = f^{n-k}(f^k(v)) = f^{n-k}(-\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{a_k} f^i(v)) = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{a_i}{a_k} f^{i+n-k}(v) = -\sum_{j=n-k}^{n-1} \frac{a_{j-n+k}}{a_k} f^j(v) \in U$.

Sei nun U' ein f-invariant Untervektorraum von V, der v enthält. Da $v \in U'$ liegt, gilt $f(v) \in U'$. Also per Induktion liegen alle $f^k(v) \in U'$ für beliebige $k \in \mathbb{N}$. Insbesondere, $U \subseteq U'$.

Aufgabe 2. Sei U ein A-invariant Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$. Entweder $\dim(U) = 0$, dann ist $U = \{0\}$, oder $\dim(U) = 2$, dann ist $U = \mathbb{R}^2$, oder $\dim(U) = 1$, dann existiert $v \in U \setminus \{0\}$ und $U = \langle v \rangle_{\mathbb{R}}$.

Aus Auf. 1 folgt, dass U auch Av enthält. Also $Av = \lambda v$ für $\lambda \in \mathbb{R}$, d.h., v ist ein EV von A. A ist aber nilpotent, also alle seine EW sind 0 und $v \in \ker(A)$ liegt.

Es gilt $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \ker(A) \Leftrightarrow b = 0$, also $\ker(A) = \left\{ \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\}$ und $\dim \ker(A) = 1$. Es gilt auch $U = \langle v \rangle_{\mathbb{R}} \subseteq \ker(A)$, also $U = \ker(A)$.

Es gibt genau drei A-invarianten Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$, nähmlich, $\{0\}$, $\ker(A)$, und $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 3.

a) Die jordansche Normalform von f hat l Block und es gilt $\dim \ker(f) = l$, also $\mathrm{rk}(f) = 4 = 8 - l$ und $l = 4$.

Die jordansche Normalform von f hat dann 4 Block, mit größe r_1, r_2, r_3 und r_4. Es gilt $\max(r_1, r_2, r_3, r_4) = \mathrm{nildeg}(f) = 3$, und $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 8$. Also gibt es nur zwei Möglichkeiten: $8 = 3 + 3 + 1 + 1 = 3 + 2 + 2 + 1$, also

$$f \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|c}
0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \quad \text{oder} \quad f \simeq \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c}
0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

b) Wir schreiben f im jordansche Normalform, dann

$$f^2 \simeq \left(\begin{array}{ccc|ccc|c|c}
0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right) \quad \text{oder} \quad f^2 \simeq \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c}
0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Also ist $\mathrm{rk}(f^2)$ entweder 2 oder 1.

Aufgabe 4. Seien $a_0, \ldots, a_{m-1} \in K$ sodass $a_0 v + a_1 Av + \cdots + a_{m-1}A^{m-1}v = 0$ ist. Dann ist auch $A(a_0 v + a_1 Av + \cdots + a_{m-1}A^{m-1}v) = a_0 Av + \cdots + a_{m-2}A^{m-1}v + a_{m-1}A^m v = 0$. Aber $A^m = 0$, also $a_0 Av + \cdots + a_{m-2}A^{m-1}v = 0$. Analog gilt der folgende Gleichungsystem:

$$\begin{cases}
a_0 v + a_1 Av + \ldots + a_{m-2}A^{m-2}v + a_{m-1}A^{m-1}v = 0 \\
a_0 Av + a_1 A^2 v + \ldots + a_{m-2}A^{m-1}v = 0 \\
\vdots \\
a_0 A^{m-2}v + a_1 A^{m-1}v = 0 \\
a_0 A^{m-1}v = 0
\end{cases}$$

Weil $A^{m-1}v \neq 0$, folgt aus der m-te Gleichung, dass $a_0 = 0$ ist. Dann ist die $(m-1)$-te Gleichung äquivalent zu $a_1 A^{m-1}v = 0$, und analog gilt $a_1 = 0$. Per Induktion gilt $a_k = 0$ für alle $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, d.h., $v, Av, \ldots, A^{m-1}v$ ist linear unabhängig.

Aufgabe 5.

a) Es gilt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A^2$ und daraus folgt $A^n = A^2$ für alle $n > 1$. Also gilt $\mathrm{im}\, A = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$, $\mathrm{im}\, A^2 = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} \neq \mathrm{im}\, A$, und $\operatorname{im} A^n = \operatorname{im} A^2$ für alle $n > 1$. Es gilt auch $\ker A = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ und $\ker A^2 = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}} = \ker A^n$ für $n > 1$.

b) Wir haben $\operatorname{im} A^2 = \langle \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ und $\ker A^2 = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$, und offensichtlich $\operatorname{im} A^2 \oplus \ker A^2 = \mathbb{R}^3$

c) Wir haben $\operatorname{im} A = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$ und $\ker A = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$. Insbesondere, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{im} A \cap \ker A$.

Aufgabe 6.

a) $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \det \begin{pmatrix}\lambda - 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda - 2 & -2\\ 0 & 0 & \lambda - 2\end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)^2$, also sind 1 und 2 die EW von A.

- $\operatorname{Eig}_1(A) = \ker(I_3 - A) = \ker \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$.
- Von $\chi_A(\lambda)$ wissen wir, dass $\dim(\operatorname{Hau}_1(A)) = 1$ ist. Wir wissen auch, dass $\operatorname{Eig}_1(A) \subseteq \operatorname{Hau}_1(A)$ ist. Also $\operatorname{Hau}_1(A) = \operatorname{Eig}_1(A) = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$.
- $\operatorname{Eig}_2(A) = \ker(2I_3 - A) = \ker \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$.
- Von $\chi_A(\lambda)$ wissen wir, dass $\dim(\operatorname{Hau}_2(A)) = 2$ ist. Wir wissen auch, dass $\operatorname{Eig}_2(A) \subseteq \operatorname{Hau}_2(A)$ ist. Aber $\dim(\operatorname{Eig}_2(A)) = 1$, also Hau_2 ist echt großer als $\operatorname{Eig}_2(A)$.

  $\ker(2I_3 - A)^2 = \ker \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2 = \ker \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$.

  $\operatorname{Hau}_2(A)$ enthält $\ker(2I_3 - A)^2$ der Dimension 2 hat, also $\operatorname{Hau}_2(A) = \ker(2I_3 - A)^2 = \langle \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}$.

b) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$, und $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ ist eine Basis von $\operatorname{Hau}_1(A)$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ist eine Basis von $\operatorname{Hau}_2(A)$, also $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Hau}_1(A) \oplus \operatorname{Hau}_2(A)$.

Es gilt aber $\dim(\mathrm{Eig}_1(A)) = \dim(\mathrm{Eig}_2(A)) = 1$, und $\mathbb{R}^3 \neq \mathrm{Eig}_1(A) + \mathrm{Eig}_2(A)$.