

Linear Algebra II
Übungsblatt 6
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

- a) Es gilt $f(v) = 10v$. Dann gilt auch $f^2(v) = f(f(v)) = f(10v) = 10f(v) = 100v$. Also zuletzt gilt $g(v) = f^2(v) - f(v) - 5v = 100v - 10v - 5v = 85v$, d.h., v ist ein EV von g mit EW 85.
- b) Sei $f \in \text{End}(V)$ und v ein EV von f mit EW λ . Dann gilt $f(v) = \lambda v$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $f^k(v) = \lambda^k v$.
- Sei $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in K[x]$. Dann gilt $[p(f)](v) = [\sum_{k=0}^n a_k f^k](v) = \sum_{k=0}^n [a_k f^k(v)] = \sum_{k=0}^n [a_k \lambda^k v] = [\sum_{k=0}^n a_k \lambda^k] v = p(\lambda)v$. D.h., v ist ein EV von $p(f)$ mit EW $p(\lambda)$.

Aufgabe 2.

- a) Sei $u \in V$ mit $g(u) = 0$. Dann ist $g(f(u)) = [f^2 - f - 5\text{id}_V](f(u)) = f^3(u) - f^2(u) - 5f(u) = f(f^2(u) - f(u) - 5u) = f(g(u)) = f(0) = 0$.
- b) Sei $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \in K[x]$ und sei $v \in V$. Dann ist $[p(f)](f(v)) = [\sum_{k=0}^n a_k f^k](f(v)) = \sum_{k=0}^n [a_k f^k(f(v))] = \sum_{k=0}^n [a_k f^{k+1}(v)] = f(\sum_{k=0}^n a_k f^k(v)) = f(p(f)(v))$, d.h., f und $p(f)$ kommutieren.
- Sei nun $u \in \ker(p(f))$. Dann $p(f)(u) = 0$. Es gilt aber $p(f)(f(u)) = f(p(f)(u)) = f(0) = 0$, d.h., $f(u) \in \ker(p(f))$ und $\ker(p(f))$ ist f -invariant.

Aufgabe 3. Sei $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Es gilt $\det(\lambda I_3 - A) = (\lambda - 4)((\lambda - 3)^2 - 1) =$

$(\lambda - 4)(\lambda - 3 - 1)(\lambda - 3 + 1) = (\lambda - 4)^2(\lambda - 2)$. Wir betrachten $4I_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

die hat Rang 2, also $\dim \text{Eig}_4(A) = \dim \ker(4I_3 - A) = 1$. Aber $\dim \text{Hau}_4(A) = 2$, also ist die jordanische Normalform gleich $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ sodass $\chi_A(x) = (x-2)^3(x-4)(x-6)$. Dann ist $\dim \text{Hau}_2(A) = 3$ und $\dim \text{Eig}_2(A)$ ist entweder 1, 2 oder 3, und die jordanische Normalform von A ist

$$\text{entweder } A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \text{ oder } A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Also ist A ähnlich zu genau eine von A_1 , A_2 , oder A_3 .

Aufgabe 5. Wir schreiben f als jordanische Normal form, d.h., es existiert $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ sodass $A_f = S^{-1}JS$, wobei A_f die Matrix von f ist und J in jordanische Normalform ist. Dann existiert $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$ diagonal und $N \in \mathbb{C}^{n \times n}$ nilpotent mit $J = D + N$. f_{diag} ist dann angenommen durch $S^{-1}DS$ und f_{nilp} durch $S^{-1}NS$. Aus Bem. 7.2.5 folgt, dass der Nilpotenzgrad von f_{nilp} gleich der maximum der Größe des Jordan-Blocks von N ist.

Aufgabe 6.

- a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in jordanische Normalform. Dann existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell \in \mathbb{C}$ und $r_1, \dots, r_\ell \in \mathbb{N}$ mit $r_1 + \dots + r_\ell = n$ und sodass für $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$Ae_i = \begin{cases} \lambda_k e_i & \text{wenn } i = r_1 + \dots + r_k + 1 \\ e_{i-1} + \lambda_k e_i & \text{wenn } r_1 + \dots + r_{k-1} + 1 < i < r_1 + \dots + r_k + 1 \end{cases}$$

Es gilt auch

$$A^T e_i = \begin{cases} \lambda_k e_i & \text{wenn } i = r_1 + \dots + r_k \\ \lambda_k e_i + e_{i+1} & \text{wenn } r_1 + \dots + r_{k-1} < i < r_1 + \dots + r_k \end{cases}$$

Sei $v_i = e_{n-i}$ für jeder $i \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$, und es gilt

$$A^T v_i = \begin{cases} \lambda_k v_i & \text{wenn } i = r_n + \dots + r_k + 1 \\ v_{i-1} + \lambda_k v_i & \text{wenn } r_n + \dots + r_{k+1} + 1 < i < r_n + \dots + r_k + 1 \end{cases}$$

D.h., die Matrix von A^T in der Basis $v_1, \dots, v_n$ ist in jordanische Normalform, mit gleiche Jordan-Blocks als A aber in gegen-Ordnung.

- b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Aus Bem. 7.4.8 folgt, dass $J \in \mathbb{C}^{n \times n}$ in jordanische Normalform existiert, die ähnlich zu A ist. Also existiert $S \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ mit $A = SJS^{-1}$. Daraus folgt $A^T = (S^T)^{-1}J^T S^T$, also ist A^T ähnlich zu J^T . Aus a) folgt, dass J^T ähnlich zu J ist. D.h., A ist ähnlich zu J die ähnlich zu J^T ist, die ähnlich zu A^T ist. Weil „Ähnlichkeit“ eine Äquivalenzrelation ist, ist sie insbesondere transitiv, und A ist ähnlich zu A^T .