Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Sommersemester 2025

Linear Algebra II
Übungsblatt 7
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) **Wahr:** $\deg \mu_A = 1$ gdw. $\exists \lambda \in K$ mit $\mu_A(x) = x - \lambda$ gdw. $\exists \lambda \in K$ mit $A - \lambda I_n = 0$.

b) **Wahr:** Es gilt $\deg \chi_A = n$ und μ_A teilt χ_A, also existiert $p \in K[x]$ sodass $\chi_A = \mu_A \cdot p$. Also $n = \deg \chi_A = \deg \mu_A + \deg p = \deg \mu_A + \deg p$, d.h., $\deg \mu_A = n$ gdw. $\deg p = 0$. Weil beide μ_A und χ_A normiert sind, gilt $\deg \mu_A = n$ gdw. $p = 1$ und $\mu_A = \chi_A$.

c) **Wahr:** Angenommen, dass $\mu_A \in K[x^2]$ liegt. Seien $p, q \in K[x]$ sodass $p(x^2) = \mu_A(x)$ und $q(x) = \mu_{A^2}(x^2)$ Es gibt $p(A^2) = \mu_A(A) = 0$, also $\mu_{A^2}(x)$ teilt $p(x)$ und es existiert $r \in K[x]$ sodass $p(x) = \mu_{A^2}(x) \cdot r(x)$. Es gilt auch $q(A) = \mu_{A^2}(A^2) = 0$, also $\mu_A(x)$ teilt $q(x)$ und es existiert $r' \in K[x]$ sodass $q(x) = \mu_A(x) \cdot r'(x)$. Zuletzt gilt $\mu_A(x) = p(x^2) = \mu_{A^2}(x^2) \cdot r(x^2) = q(x) \cdot r(x^2) = \mu_A(x) \cdot r'(x) \cdot r(x^2)$, also $r'(x) \cdot r(x^2) = 1$, $r(x) = r'(x) = 1$ und $\mu_{A^2}(x^2) = q(x) = \mu_A(x)$.

d) **Falsch:** Sei $A = B = 2I_n$. Dann $\mu_A = \mu_B = (x - 2)$ und $\mu_A \mu_B = (x-2)^2$ ist kein Vielfaches von $\mu_{AB} = (x - 4)$,

Aufgabe 2.

a) Weil μ_A ein Teiler von χ_A ist und χ_A Grad 3 hat, haben wir $\deg \mu_A \leqslant 3$, also brauchen wir A^i nur bis $i = 3$ zu berechnen. Es gilt

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 13 & 4 \\ 4 & 28 & 9 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

I_3, A und A^2 sind linear unabhängig, aber $A^3 - 4A^2 + 3A - I_3 = 0$, also haben wir $\mu_A = x^3 - 4x^2 + 3x - 1$.

b) $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = (\lambda - 1) \det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \lambda - 3 & -1 \end{pmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)\lambda - 1 = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 3\lambda - 1$, also gilt $\mu_A = \chi_A$. Deswegen ist μ_A ein Teiler von χ_A und $\chi_A(A) = \mu_A(A) = 0$.

Aufgabe 3.

a) $A \cdot B = A \cdot p(A) = A \cdot (-A^3 - 3A + I_5) = -A^4 - 3A^2 + A = -(A^4 + 3A^2 - A + 8I_5) + 8I_5 = -\mu_A(A) + 8I_5 = 8I_5$.

b) Sei $q = \frac{1}{8}p = -\frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}$, dann gilt $A \cdot q(A) = \frac{1}{8}A \cdot p(A) = \frac{8}{8}I_5 = I_5$, also $q(A) = A^{-1}$.

c) Seien $a_0, \ldots, a_n \in K$ sodass $\mu_A(x) = \sum_{i=0}^d a_i x^i$ ist. Sei $p(x) = -\sum_{i=1}^d a_i x^{i-1}$, dann ist $\mu_A(x) = -xp(x) + a_0$, und $0 = \mu_A(A) = -Ap(A) + a_0 I_n$, also gilt $A \cdot p(A) = a_0 I_n$. Angenommen, dass $a_0 \neq 0$ ist, dann setzen wir $q(x) = \frac{1}{a_0} p(x)$, und $q(A) = A^{-1}$. Insbesondere ist A invertierbar.

d) Angenommen nun, dass $a_0 = 0$ ist. Wir beobachten, dass $\mu_A(0) = a_0$ ist. μ_A teilt χ_A, also existiert p sodass $\chi_A(x) = \mu_A(x)p(x)$. Dann gilt $\det(A) = \det(A - 0I_n) = \chi_A(0) = \mu_A(0)p(0) = a_0 p(0) = 0$, d.h., A ist nicht invertierbar. Insbesondere existiert kein q, sodass $q(A) = A^{-1}$. D.h., es gilt:

A ist invertierbar gdw. es existiert $q \in K[x]$ sodass $A \cdot q(A) = I_n$.

Aufgabe 4.

a) Seien $\lambda \in \mathbb{Q}$ und $x, y \in \mathbb{C}$. Dann gilt $m_\alpha(\lambda x + y) = \alpha(\lambda x + y) = \lambda \alpha x + \alpha y = \lambda m_\alpha(x) + m_\alpha(y)$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{C}$ gilt $m_\alpha^n(x) = \alpha^n \cdot x$. Sei $p = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, dann gilt $p(m_\alpha)(x) = \sum_{i=0}^n a_i m_\alpha^i(x) = (\sum_{i=0}^n a_i \alpha^n)x = p(\alpha)x$.

c) $U = \{\sum_{i=0}^n a_i \alpha^i \mid n \in \mathbb{N}, a_0 \ldots, a_n \in \mathbb{Q}\} = \{p(\alpha) \mid p \in \mathbb{Q}[x]\}$.

d) Sei $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit $\deg(p) = n > 0$ und $p(\alpha) = 0$. Dann ist die Familie $1, \alpha, \ldots, \alpha^n$ linear abhängig. Sei $k > 0$ minimal, sodass $1, \alpha, \ldots, \alpha^k$ linear abhängig sind; also ist $k \leqslant n$ und es existiert $a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{Q}$ mit $a_k \neq 0$ sodass $\sum_{i=0}^k a_i \alpha^i = 0$. Dann ist $\mu_\alpha := \sum_{i=0}^k \frac{a_i}{a_k} x^k$ normiert, es gilt $\mu_\alpha(m_\alpha) = 0$, und es gibt kein $p \in \mathbb{Q}[x]$ mit Grad $< k$ sodass $p(m_\alpha) = 0$, d.h., μ_α ist das Minimalpolynom von m_α.

e) U ist der kleinste m_α-invariante Untervektorraum von $\mathbb{C}$, der 1 enthält. Aus d) folgt, dass $n \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $\alpha^n \in \langle 1, \ldots, \alpha^{n-1} \rangle_\mathbb{Q}$ ist. Also ist $\langle 1, \ldots, \alpha^{n-1} \rangle_\mathbb{Q}$ invariant unter m_α und es gilt $U \subseteq \langle 1, \ldots, \alpha^{n-1} \rangle_\mathbb{Q}$. Insbesondere, $\dim U < n$.

Aus Satz 7.5.11 folgt, dass μ_α und $\mu_{m_\alpha|_U}$ gleich sind.