Prof. Immanuel Halupczok
Dr. Blaise Boissonneau

HHU Düsseldorf
Sommersemester 2025

Linear Algebra II
Übungsblatt 8
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

a) Sei $a \in M$ ein größtes Element, d.h., es gilt $b \preccurlyeq a$ für alle $b \in M$. Sei $b \in M$ sodass $a \preccurlyeq b$ gilt. Weil a ein größtes Element ist, gilt auch $b \preccurlyeq a$. Weil $(M, \preccurlyeq)$ eine partielle Ordnung ist, folgt $a = b$ aus Antisymmetrie; d.h., es gibt keine $b \in M$ echt großer als a, also ist a ein maximales Element.

b) Sei $a \in M$ ein maximales Element und sei $b \in M$. Weil $(M, \preccurlyeq)$ eine totale Ordnung ist, gilt entweder $a \preccurlyeq b$ oder $b \preccurlyeq a$. Wenn $a \preccurlyeq b$ gilt, haben wir weil a maximal ist, dass $a = b$ ist. Also gilt entweder $a \preccurlyeq b$ oder $a = b$, d.h., für alle $b \in M$ gilt $b \preccurlyeq a$ und a ist ein größtes Element.

c) Sei $n = \#M$. Wenn $n = 1$, haben wir $M = \{a\}$ und a ist ein größtes Element.

Angenommen nun, dass alle partielle Ordnungen mit n Elemente ein maximales Element besitzen. Sei $(M, \preccurlyeq)$ eine partielle Ordnung mit $\#M = n + 1$. Sei $a \in M$. Wir betrachten $M' = M \setminus \{a\}$, dann besitzt $(M', \preccurlyeq_{|M'})$ ein maximales Element b. Wenn $b \preccurlyeq a$ gilt, ist a ein maximales Element von $(M, \preccurlyeq)$. Wenn nicht, ist b ein maximales Element von $(M, \preccurlyeq)$.

Aufgabe 2.

a) $s(F)$ ist eine Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, definiert durch $s(F)(x) = F(x+1)$. Der Graph von $s(F)$ ist genau der Graph von F einmal nach Links übersetzt.

b) Für $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wie $f + g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r \mapsto f(r) + g(r)$ und $\lambda \cdot f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r \mapsto \lambda f(r)$. Dann ist $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum: sie ist abgeschlossen unter $+$ und $\cdot$, da Summe und Produkte von stetige Abbildungen auch stetige sind; $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), +)$ ist eine Gruppe da die Nullabbidlung stetig ist, Für alle $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ ist auch $-f$ stetig, und sie ist assoziativ weil $(\mathbb{R}, +)$ assoziativ ist; und Distributivität und Assoziativität von $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), \cdot)$ folgen aus Distributivität und Assozitivität von $(\mathbb{R}, \cdot)$.

Seien nun $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ und $\lambda, r \in \mathbb{R}$. Es gilt $[s(\lambda f + g)](r) = [\lambda f + g](r + 1) = \lambda f(r+1) + g(r+1) = \lambda[s(f)](r) + [s(g)](r) = [\lambda s(f) + s(g)](r)$, also gilt $s(\lambda f + g) = \lambda s(f) + s(g)$ und s ist linear.

c) Wir haben $F_i(x) = [s^i(F_0)](x) = F_0(x + i) = (x + i)^2$, d.h., jede F_i ist eine Polynomialabbildung von Grad 2. Der Vektorraum von Polynomialabbildungen von Grad 2 hat Dimension 3, also mussen wir nur F_0, F_1 und F_2 betrachten.

F_0, F_1 und F_2 sind linear unabhängig: seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $aF_0 + bF_1 + cF_2 = 0$. Dann gilt $[aF_0 + bF_1 + cF_2](x) = ax^2 + b(x + 1)^2 + c(x + 2)^2 = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Insbesondere gilt $[aF_0 + bF_1 + cF_2](0) = b + 4c = 0$, $[aF_0 + bF_1 + cF_2](-1) = a + c = 0$ und $[aF_0 + bF_1 + cF_2](-2) = 4a + b = 0$. Daraus folgt $a = b = c = 0$ und F_0, F_1 und F_2 sind linear unabhängig. Weil sie drei Vektoren in ein 3-dimensional Vektorraum sind, gilt $U = \langle F_0, F_1, F_2 \rangle_{\mathbb{R}} = \{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mid \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = ax^2 + bx + c\}$.

Aufgabe 3.

a) Reflexiv und transitiv, aber nicht antisymmetrisch: $(1,2) \preccurlyeq (2,1)$ und $(2,1) \preccurlyeq (1,2)$ aber $(1,2) \neq (2,1)$.

b) Reflexiv, antisymmetrisch und transitiv, also ist es eine partielle Ordnung.

c) Reflexiv, nicht antisymmetrisch: $(1,2) \preccurlyeq (2,1)$ und $(2,1) \preccurlyeq (1,2)$ aber $(1,2) \neq (2,1)$, und nicht transitiv: $(2,2) \preccurlyeq (2,1) \preccurlyeq (1,1)$ aber $(2,2) \not\preccurlyeq (1,1)$.

d) Antisymmetrisch, aber nicht reflexiv: $(1,2) \not\preccurlyeq (1,2)$, und nicht transitiv: $(1,3) \preccurlyeq (2,5) \preccurlyeq (4,6)$ aber $(1,3) \not\preccurlyeq (4,6)$.

e) Nein, weil beide $(1,2) \not\preccurlyeq (2,1)$ und $(2,1) \not\preccurlyeq (1,2)$ gelten.

f) Es gibt keine maximal oder größte Elemente, weil für alle $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt $(a,b) \preccurlyeq (a+1, b+1)$. $(0,0)$ ist das eindeutig kleinstes Element und auch das eindeutig minimales Element, weil $(0,0) \preccurlyeq (a,b)$ gilt für alle $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Aufgabe 4.

a) Es gilt $\emptyset \subseteq \{1\} \subseteq \{1,2\} \subseteq \{1,2,3\} \subseteq \{1,2,3,4\} \subseteq \{1,2,3,4,5\}$, also setzen wir $A_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,4,5\}\}$.

b) Sei $A_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$. Dann besitzt A_2 zwei minimale Elemente, nähmlich $\{1\}$ und $\{2\}$, und genau ein maximales Element, nähmlich $\{1,2\}$.

c) $\{1,2,3,5\}$ und $\{1,2,3,4,5\}$.

d) Sei $A_4 = \{\{1\}, \{2\}\}$. Dann ist $\{1\}$ ein minimales und maximales Element von A_4.

Aufgabe 5.

a) Sei V ein K-Vektorraum, $A \subseteq V$, $v \in V$, und $f \in \mathrm{End}(V)$. Satz 3.2.6 sagt, dass $\langle A \rangle_K$ der kleinster Untervektorraum von V ist, der A enthält. Also ist er ein kleinstes Element in die Partielle Ordnung $(\{U \text{ Untervektorraum von } V \mid A \subseteq U\}, \subseteq)$.

   Satz 7.5.11 sagt, dass $\langle (f^i(v))_{i \in \mathbb{N}} \rangle_K$ kleinster f-invarianter Untervektorraum von V ist, der v enthält. Also ist er ein kleinstes Element in die Partielle Ordnung $(\{U \text{ Untervektorraum von } V \mid v \in U \text{ und } f(U) \subseteq U\}, \subseteq)$.

b) Da $(M, \preccurlyeq)$ ein kleinstes Element besitzt, $(M, \preccurlyeq)$ besitzt auch genau ein minimales Element, also gibt es keine Unterschied.

   In anderen Mengen, z.B. $M = \{U \text{ Untervektorraum von } V \mid \dim(U) \neq 0\}$ besitzt keine kleinste Elemente für $\subseteq$, es gibt aber mehrere minimale Elemente, nähmlich, jede $U \in M$ mit $\dim(U) = 1$.