Linear Algebra II
Übungsblatt 9
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

Sei $Z = \{A \subseteq M \mid A \text{ ist eine Antikette}\}$. Dann ist $(Z, \subseteq)$ eine partielle Ordnung. Da $\emptyset \subseteq M$ eine Antikette ist, gilt $\emptyset \in Z$ und $Z \neq \emptyset$.

Sei nun $K \subseteq Z$ eine Kette. Wir definieren $X = \bigcup_{A \in K} A$, dann ist X eine obere Schrank von K in $(Z, \subseteq)$:

Sei $A \in K$, dann gilt $A \subseteq X$ per Definition von X .

Wenn $\#X < 2$ gilt, ist X eine Antikette. Seien außerdem $a, a' \in X$ mit $a \neq a'$. Per Definition von X existieren $A, A' \in K$ mit $a \in A$ und $a' \in A'$. Weil K eine Kette ist, gilt entweder $A \subseteq A'$ oder $A' \subseteq A$. Insbesondere ist $A \cup A'$ entweder gleich A oder gleich A' und ist immer eine Elemente von K , also eine Antikette. Daraus folgt, dass a und a' unvergleichbar sind, d.h., X ist eine Antikette, also liegt $X \in Z$.

Weil $(Z, \subseteq)$ eine nicht leere partielle Ordnung ist, sodass alle Kette eine obere Schrank besitzen, folgt daraus, dass $(Z, \subseteq)$ ein maximales Element $A \in Z$ besitzt.

A ist eine Antikette, da $A \in Z$ liegt. Sei $a \in M$. Wir betrachten $A \cup \{a\}$. Es gilt $A \subseteq A \cup \{a\}$, also ist entweder $A = A \cup \{a\}$ oder $A \subsetneq A \cup \{a\}$.

Wenn $A = A \cup \{a\}$ gilt, ist $a \in A$, und $a \preceq a$ gilt.

Wenn $A \subsetneq A \cup \{a\}$ gilt, da A maximal in Z ist, kann $A \cup \{a\}$ nicht eine Antikette sein; also ist a vergleichbar mit ein $a' \in A$.

D.h., A ist eine Antikette, sodass jedes Element von M mit einem Element von A vergleichbar ist.

Aufgabe 2.

- Wir nehmen an, dass $a_1, \dots, a_n, a'_1, \dots, a'_m \in K$ und $v_1, \dots, v_n, v'_1, \dots, v'_m \in B$ existieren, mit $v = \sum_{i=1}^n a_i v_i = \sum_{i=1}^m a'_i v'_i$. Dann setzen wir $B' = \{v_1, \dots, v_n, v'_1, \dots, v'_m\}$ und $U = \langle B' \rangle_K \subseteq V$. Da $\#B' = n + m$ gilt und B' erzeugt U , gilt $\dim U \leq n + m$. Es gilt auch $v \in U$ und v lässt sich auf mehrere Arten als Linearkombination von Vektoren aus B' schreiben.
- Aus 3.4.3 folgt, dass B' keine Basis von U ist. B' erzeugt aber U , also ist B' linear abhängig, und daraus folgt, dass B linear abhängig ist und dann auch keine Basis von V .
- Ist B linear abhängig, so existieren $a_1, \dots, a_n \in K \setminus \{0\}$ und $v_1, \dots, v_n \in B$ mit $\sum_{i=1}^n a_i v_i = 0$. Wir setzen $B' = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $U = \langle B' \rangle_K$.
- B' ist linear abhängig, dann ist sie auch keine Basis von U . Aus 3.4.3 folgt, dass ein $v \in U$ existiert, der sich in mehrere Arten als Linearkombination von Elemente von B' schreiben lässt.

Aufgabe 3.

- a) Wenn $\dim V = n < \infty$ gilt, dann gilt $\dim V \oplus V = 2n$. Wenn $n \neq 0$ gilt, dann ist $n \neq 2n$ und V nicht isomorph zu $V \oplus V$ ist.
- b) Sei $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in U_0 \cap U_1$. Dann ist $a_{2i} = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $a_{2i+1} = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$, d.h., $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (0)$ ist, und $U_0 \cap U_1 = \{0\}$ gilt. Sei nun $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in V$. Dann definieren wir $(b_i)_{i \in \mathbb{N}}$ durch $b_{2i} = a_{2i}$ und $b_{2i+1} = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Wir setzen $b'_i = a_i - b_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$, dann gilt $(b'_i)_{i \in \mathbb{N}} \in U_0$, $(b_i)_{i \in \mathbb{N}} \in U_1$, und $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} = (b'_i)_{i \in \mathbb{N}} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}}$, d.h., $V = U_1 + U_0$ gilt.
- c) Klar.
- d) $(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \mapsto (0, a_0, 0, a_1, 0, a_2, \dots)$. Also ist V isomorph zu beide U_0 und U_1 , und $V \oplus V$ ist isomorph zu $U_0 \oplus U_1 = V$.

Aufgabe 4.

- a) Wir nennen E_v die Abbildung von $\text{Hom}(V, W)$ nach W definiert durch $E_v(f) = f(v)$.
- b) Seien $\lambda \in K$ und $f, g \in \text{Hom}(V, W)$. Dann gilt $E_v(\lambda f + g) = [\lambda f + g](v) = \lambda f(v) + g(v) = \lambda E_v(f) + E_v(g)$, also ist E_v linear.
- c) Wir nennen nun E_v die Abbildung von $\text{Abb}(V, W)$ nach W definiert noch ein Mal durch $E_v(f) = f(v)$.

Seien $\lambda \in K$ und $f, g \in \text{Abb}(V, W)$. Dann gilt $E_v(\lambda f + g) = [\lambda f + g](v) = \lambda f(v) + g(v) = \lambda E_v(f) + E_v(g)$, also ist E_v linear.

Aufgabe 5.

- a) Sei $\alpha \in V^*$. Dann $\text{im } \alpha \subseteq K$, also gilt $\dim \text{im } \alpha = 1$ oder $\dim \text{im } \alpha = 0$. Also ist entweder $\dim \ker \alpha = n$ oder $\dim \ker \alpha = n - 1$. D.h., wenn $\alpha \in V^*$ existiert, sodass $\ker \alpha = U$ ist, dann gilt entweder $\dim U = \dim V$ oder $\dim U = \dim V - 1$.

Angenommen nun, dass $\dim U = \dim V$. Dann ist $U = V$ und U ist der Kern von $0 \in V^*$. angenommen zuletzt, dass $\dim U = \dim V - 1$. Sei $v_1, \dots, v_{n-1}$ eine Basis von U und $v_n \in V$ sodass $v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$ eine Basis von V ist. Wir definieren $\alpha \in V^*$ durch $\alpha(v_1) = 0, \alpha(v_2) = 0, \dots, \alpha(v_{n-1}) = 0$, und $\alpha(v_n) = 1$. Dann ist $\ker \alpha = U$, und wir haben:

$\alpha \in V^*$ existiert, sodass $\ker \alpha = U$ ist, gdw. entweder $\dim U = \dim V$ oder $\dim U = \dim V - 1$ gilt.

- b) Wenn $\dim U = n$, dann ist $U = \ker 0$.

Wenn $\dim U = n - k$ für $0 < k \leq n$, dann wählen wir eine Basis $v_1, \dots, v_{n-k}$ von U und erlangen wir sie zu eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V . Wir definieren für $0 < i \leq k$ ein $\alpha_i \in V^*$ durch $\alpha_i(v_{n-i}) = 1$ und $\alpha_i(v_j) = 0$ für $j \neq n - i$. Dann gilt $\ker \alpha_1 \cap \dots \cap \ker \alpha_k = \langle v_1, \dots, v_{n-k} \rangle_K = U$.