

Aufgaben der Nachklausur Lineare Algebra II

Aufgabe 1 (2+2+2+2):

Sei V ein endlich-dimensionaler euklidischer $\mathbb{R}$ -Vektorraum und sei $v_1, \dots, v_n$ eine Orthonormalbasis von V . Wir schreiben im Folgenden $\langle v, v' \rangle$ für das Skalarprodukt von v und v' . Mit der Notation $\langle \dots \rangle_{\mathbb{R}}$ in (b) hingegen ist der von den angegebenen Vektoren erzeugte Untervektorraum gemeint.

- (a) Wir nehmen an, dass $n \geq 4$ ist. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle v_1 + 2v_2, 3v_2 + v_4 \rangle$.
- (b) Sei $1 \leq d \leq n-1$ und $U = \langle v_1, \dots, v_d \rangle_{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass $U^\perp = \langle v_{d+1}, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{R}}$ gilt.
- (c) Sei U wie in (b), sei nun außerdem $r \in \mathbb{R}$ gegeben, und sei $\beta: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\beta(u_1 + u'_1, u_2 + u'_2) = \langle u_1, u_2 \rangle + r \langle u'_1, u'_2 \rangle \quad \text{für } u_1, u_2 \in U \text{ und } u'_1, u'_2 \in U^\perp.$$

Für welche r ist β positiv definit?

Wie immer ist die Antwort zu beweisen. Sie dürfen dabei ohne Begründung verwenden, dass β eine symmetrische Bilinearform ist.

- (d) Sei β wie in (c), für $r = -1$. Zeigen Sie: Für jedes Element α des Dualraums V^* existiert ein $v_\alpha \in V$, so dass für alle $w \in V$ gilt: $\alpha(w) = \beta(v_\alpha, w)$.

Aufgabe 2 (2+1+2+1+2):

$$\text{Sei } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}.$$

- (a) Bestimmen Sie den kleinsten A -invarianten Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$, der $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ enthält.
- (b) Sei $v \in \mathbb{R}^5 \setminus \{0\}$: Zeigen Sie: Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $A^m v \neq 0$ und $A^{m+1} v = 0$ ist.
- (c) Zeigen Sie, dass für v und m wie in (b) gilt: $A^m v \in \langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}}$.
- (d) Zeigen Sie: Jeder nicht-triviale A -invariante Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$ enthält e_1 .
- (e) Bestimmen Sie alle 2-dimensionalen A -invarianten Untervektorräume von $\mathbb{R}^5$.

Aufgabe 3 (2+2+2+2):

In dieser Aufgabe sei $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$.

- (a) Im Fall $n = 4$: Was kann die jordansche Normalform der Matrix A sein, wenn ihr charakteristisches Polynom $\chi_A = (x-2)^2(x-4)(x-6)$ ist?
- (b) Im Fall $n = 6$: Was kann die jordansche Normalform der Matrix A sein, wenn ihr Minimalpolynom $\mu_A = (x-2)^2(x-4)(x-6)$ ist?
- (c) Sei $n \geq 4$. Zeigen Sie: Hat A das Minimalpolynom μ_A aus (b), so hat das charakteristische Polynom von A die Form $(x-2)^r(x-4)^s(x-6)^t$, für $r \geq 2, s \geq 1, t \geq 1$.
- (d) Zeigen Sie, dass (c) sogar ein genau-dann-wenn ist, im folgenden Sinn: Zu jedem $r \geq 2, s \geq 1, t \geq 1$ existiert ein $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ (für n geeignet), dessen Minimalpolynom das Polynom μ_A aus (b) ist und dessen charakteristisches Polynom $(x-2)^r(x-4)^s(x-6)^t$ ist.

Aufgabe 4 (2+2+2+2):

Sei $V = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, aufgefasst als $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit punktweiser Vektoraddition und punktweiser Skalarmultiplikation. Sei $U_1 \subseteq V$ die Menge derjenigen Funktionen $f \in V$, so dass $f(a) = f(-a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt.

- (a) Zeigen Sie: U_1 ist ein Untervektorraum von V .
- (b) Betrachten Sie die Abbildung $g: V \rightarrow V$, die eine Funktion $f \in V$ abbildet auf die Funktion $x \mapsto \frac{1}{2}(f(x) + f(-x))$.
Zeigen Sie: $\text{im } g = U_1$.
Hinweis: Es kann nützlich sein zu prüfen, dass g jedes Element von U_1 auf sich selbst abbildet.
- (c) Sei nun außerdem $U_2 \subseteq V$ die Menge derjenigen Funktionen $f \in V$, so dass $f(a) = -f(-a)$ für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt. Sie dürfen im Folgenden ohne Beweis verwenden, dass auch U_2 ein Untervektorraum von V ist. Zeigen Sie, dass $V = U_1 \oplus U_2$ ist. (Hierbei ist die innere direkte Summe gemeint.)
Hinweis: Es kann nützlich sein zu prüfen, dass $f - g(f) \in U_2$ ist, für $f \in V$ beliebig und g wie in (b).
- (d) Zeigen Sie, dass eine Basis $B \subseteq V$ von V existiert, so dass jede Funktion $f \in B$ eine symmetrische Nullstellenmenge hat, d. h. für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt: $f(a) = 0 \iff f(-a) = 0$.
Hinweis: Für einen möglichen Lösungsweg ist es nützlich, die Nullstellenmengen von Funktionen in U_1 und in U_2 zu untersuchen.

Aufgabe 5 (1+2+1+2+2):

Sei $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. In dieser Aufgabe dürfen Sie ohne Begründung verwenden, dass alle angegebenen Abbildungen (f , f' und g) linear sind.

- (a) Wir betrachten die Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3, v \mapsto v_0 \otimes v$.
Drücken Sie $f(e_1)$ in der Standard-Basis $\{e_i \otimes e_j \mid 1 \leq i, j \leq 3\}$ von $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ aus.
- (b) Sei $v'_0 \in \mathbb{R}^3$ ein weiterer Vektor und $f': \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3, v \mapsto v'_0 \otimes v$.
Zeigen Sie: Wenn $\text{im } f \subseteq \text{im } f'$ gilt, dann ist $v'_0 \in \langle v_0 \rangle_{\mathbb{R}}$.
Hinweis: Die Bedingung an v'_0 folgt sogar schon aus $f(e_1) \in \text{im } f'$.
- (c) Wir betrachten nun die Abbildung $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \bigwedge^2 \mathbb{R}^3, v \mapsto v_0 \wedge v$.
Drücken Sie $g(e_1)$ in der Standard-Basis $e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3$ von $\bigwedge^2 \mathbb{R}^3$ aus.
- (d) Bestimmen Sie den Kern von g .
- (e) Geben Sie eine Basis vom Bild von g an.