

Linear Algebra II
Nachklausur
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1.

- a) $\langle v_1 + 2v_2, 3v_2 + v_4 \rangle = \langle v_1, 3v_2 \rangle + \langle v_1, v_4 \rangle + \langle 2v_2, 3v_2 \rangle + \langle 2v_2, v_4 \rangle = 0 + 0 + 6 + 0 = 6$.
- b) Sei $v \in U^\perp$. Aus der Vorlesung (Satz 6.2.7) folgt, dass $v = \sum_{i=1}^n \langle v, v_i \rangle v_i$. Sei $i \in \{1, \dots, d\}$, dann gilt $\langle v, v_i \rangle = 0$ da $v_i \in U$ und $v \in U^\perp$ sind. Also $v = \sum_{i=d+1}^n \langle v, v_i \rangle v_i$, d.h., $v \in \langle v_{d+1}, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{R}}$.

Sei nun $v \in \langle v_{d+1}, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{R}}$, also existieren $a_{d+1}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sodass $v = \sum_{i=d+1}^n a_i v_i$. Sei auch $u \in U = \langle v_1, \dots, v_d \rangle_{\mathbb{R}}$, also existieren $b_1, \dots, b_d \in \mathbb{R}$ sodass $u = \sum_{i=1}^d b_i v_i$. Aus der Bilinearität des Skalarprodukts folgt, dass $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^d \sum_{j=d+1}^n a_i b_j \langle v_i, v_j \rangle = 0$. D.h., $v \in U^\perp$, und wir haben $U^\perp = \langle v_{d+1}, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{R}}$.

- c) Angenommen, dass β positiv definit ist. Dann muss $\beta(v_n, v_n) = r \langle v_n, v_n \rangle = r$ positiv sein.

Angenommen nun, dass $r > 0$ gilt. Sei $v \in V$ und seien $u \in U$ und $u' \in U^\perp$ mit $v = u + u'$. Dann gilt $\beta(v, v) = \langle u, u \rangle + r \langle u', u' \rangle$. Weil der Skalarprodukt positiv definit ist, gilt $\langle u, u \rangle \geq 0$ und $\langle u', u' \rangle \geq 0$, also $\beta(v, v) \geq 0$. Um $\beta(v, v) = 0$ zu sein, muss sowohl $\langle u, u \rangle$ als $\langle u', u' \rangle$ null sein, also $u = 0$ und $u' = 0$, aber dann gilt $v = 0$. D.h., β ist positiv definit gdw $r > 0$.

- d) Sei $\alpha \in V^*$. Wir setzen $a_i = \alpha(v_i)$ und definieren $v_\alpha = \sum_{i=1}^d a_i v_i - \sum_{i=d+1}^n a_i v_i$. Offensichtlich gilt $\sum_{i=1}^d a_i v_i \in U$ und $-\sum_{i=d+1}^n a_i v_i \in U^\perp$.

Sei $w = \sum_{i=1}^n b_i v_i \in V$. Dann gilt $\beta(v_\alpha, w) = \langle \sum_{i=1}^d a_i v_i, \sum_{i=1}^d b_i v_i \rangle - \langle -\sum_{i=d+1}^n a_i v_i, \sum_{i=d+1}^n b_i v_i \rangle = \sum_{i=1}^n a_i b_i = \sum_{i=1}^n b_i \alpha(v_i) = \alpha(\sum_{i=1}^n b_i v_i) = \alpha(w)$.

Aufgabe 2.

- a) Es gilt $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Av = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A^2v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, und $A^3v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Daraus folgt,

dass der kleinste A -invariante Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$ gleich $\langle v, Av, A^2v \rangle_{\mathbb{R}}$ ist. Offensichtlich gilt $\langle v, Av, A^2v \rangle_{\mathbb{R}} = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle_{\mathbb{R}}$.

- b) Da $w \neq 0$ gilt, haben wir $A^0 w \neq 0$. Es gilt aber $A^5 = 0$, also $A^5 w = 0$. Also gibt es $m \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, sodass $A^m w \neq 0$ und $A^{m+1} w = 0$ gelten.
- c) Sei m wie oben. Dann gilt $A \cdot (A^m w) = 0$, also $A^m w \in \ker A$. A hat rank 4, also $\dim \ker A = 1$. Offensichtlich gilt $Ae_1 = 0$, also $e_1 \in \ker A$ und $\ker A = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}}$. Daraus folgt, dass $A^m w \in \ker A = \langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}}$.

- d) Sei U ein A -invariant Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$, mit $U \neq \{0\}$. Sei $w \in U \setminus \{0\}$, also gilt $A^k w \in U$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei m wie in (b). Dann gilt $A^m \in \langle e_1 \rangle_{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, d.h., $A^m = \lambda e_1$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Da $\lambda e_1 \in U$ ist, ist auch $e_1 \in U$.
- e) Sei U ein A -invariant Untervektorraum von $\mathbb{R}^5$, mit $\dim(U) = 2$. Aus (d) folgt, dass $e_1 \in U$ ist. Wir ergänzen die Menge $\{e_1\}$ zu eine Basis $\{e_1, v\}$ von U . Dann existieren $a, b \in \mathbb{R}$ mit $Av = ae_1 + bv$. Daraus folgt $A^k v = b^{k-1}e_1 + b^k v$. Sei m wie in (b), also gilt $A^{m+1}v = b^m ae_1 + b^{m+1}v = 0$, und b muss null sein. D.h., $Av = ae_1$. Offensichtlich muss $v = a'e_1 + ae_2$ sein, mit $a \neq 0$, und daraus folgt $U = \langle e_1, e_2 \rangle_{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 3.

- a) Die jordanische Normalform von A kann entweder $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ sein.

- b) Die jordanische Normalform von A ist eine von diese 7:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

- c) Aus der Vorlesung (Satz 7.5.7) folgt, dass die EW von A genau 2, 4, und 6 sind, das heißt, die jordanische Normalform von A nur 2, 4, und 6 am Diagonal enthält.

Also haben wir, dass χ_A die Form $(x-2)^r(x-4)^s(x-6)^t$ hat. Weil χ_A ein Vielfaches von μ_A ist, gilt $r \geq 2$, $s \geq 1$ und $t \geq 1$.

d) Wir betrachten $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ & & 2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 2 & \\ & & & & & 4 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 4 \\ & & & & & & & & 6 \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & 6 \end{pmatrix}.$

Dann $\mu_A = (x-2)^2(x-4)(x-6)$, und $\chi_A = (x-2)^r(x-4)^s(x-6)^t$.

Aufgabe 4.

- a) Die Nullabbildung $\mathbf{0}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$ liegt in U_1 . Seien $f, g \in U_1$ und $\lambda, a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $[f + \lambda g](-a) = f(-a) + \lambda g(-a) = f(a) + \lambda g(a) = [f + \lambda g](a)$, also $f + \lambda g \in U_1$ gilt.
- b) Sei $f \in U_1$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $[g(f)](a) = \frac{1}{2}(f(a) + f(-a)) = \frac{1}{2}(f(a) + f(a)) = f(a)$, also $g(f) = f$. Insbesondere, $U_1 \subseteq \text{im } g$.
- Sei nun $f \in V$ und $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $[g(f)](-a) = \frac{1}{2}(f(-a) + f(a))$, und $[g(f)](a) = \frac{1}{2}(f(a) + f(-a))$. D.h., $g(f) \in U_1$ liegt, und $\text{im } g \subseteq U_1$.
- c) Sei $f \in U_1 \cap U_2$ und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f(a) = f(-a) = -f(a)$, also $f(a) = 0$ und f ist die Nullabbildung. D.h., $U_1 \cap U_2 = \{\mathbf{0}\}$.
- Sei nun $f \in V$. Wir betrachten $f - g(f)$. Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $[f - g(f)](-a) = f(-a) - \frac{1}{2}(f(-a) + f(a)) = \frac{1}{2}f(-a) - \frac{1}{2}f(a) = \frac{1}{2}(f(-a) + f(a)) - f(a) = -[f - g(f)](a)$, also $f - g(f) \in U_2$ liegt.
- Aus (b) folgt, dass $g(f) \in U_1$ liegt, also f lässt sich als $(f - g(f)) + g(f)$ schreiben, mit $f - g(f) \in U_2$ und $g(f) \in U_1$. D.h., $U_1 + U_2 = V$.
- d) Da $U_1 \oplus U_2 = V$ gilt, können wir eine Basis B_1 von U_1 und B_2 von U_2 nehmen, und es gilt, dass $B := B_1 \cup B_2$ eine Basis von V ist.
- Sei $f \in B$ und sei $a \in \mathbb{R}$ mit $f(a) = 0$. Dann entweder $f \in U_1$ ist, und $f(-a) = f(a) = 0$, oder $f \in U_2$ ist, und $f(-a) = -f(a) = 0$. In beide Fällen, f hat symmetrische Nullstellenmenge.

Aufgabe 5.

- a) $f(e_1) = v_0 \otimes e_1 = (e_1 + e_2 + e_3) \otimes e_1 = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_1$.
- b) Angenommen, dass $\text{im } f \subseteq \text{im } f'$. Insbesondere existiert $w \in \mathbb{R}^3$ mit $f'(w) = f(e_1)$, also $v'_0 \otimes w = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_1$. Wir schreiben $v'_0 = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3$ und $w = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3$, mit $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Dann gilt $v'_0 \otimes w = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} a_i b_j e_i \otimes e_j = e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_1 + e_3 \otimes e_1$. Daraus folgt $a_1 b_1 = 1$, also, $b_1 \neq 0$ und $a_1 = b_1^{-1}$, und $a_2 b_1 = 1$, also $a_2 = b^{-1} = a_1$, und $a_3 b_1 = 1$, also $a_3 = a_2 = a_1$ und $v'_0 = a_1 v_0 \in \langle v_0 \rangle_{\mathbb{R}}$.
- c) $g(e_1) = v_0 \wedge e_1 = (e_1 + e_2 + e_3) \wedge e_1 = e_1 \wedge e_1 + e_2 \wedge e_1 + e_3 \wedge e_1 = -e_1 \wedge e_2 - e_1 \wedge e_3$.
- d) Aus der Vorlesung (Satz 8.4.20) folgt, dass $v_0 \wedge v = 0$ genau dann gilt, wenn $v \in \langle v_0 \rangle_{\mathbb{R}}$ ist. Also $\ker g = \langle v_0 \rangle_{\mathbb{R}}$.
- e) Da $\ker g$ dim 1 hat, folgt dass $\text{im } g$ dim 2 hat. $g(e_1) = -e_1 \wedge e_2 - e_1 \wedge e_3 \in \text{im } g$ liegt, und $g(e_2) = e_1 \wedge e_2 - e_2 \wedge e_3 \in \text{im } g$ auch; sie sind linear unabhängig und bilden eine Basis von $\text{im } g$.